Funções Lógicas e Portas Lógicas

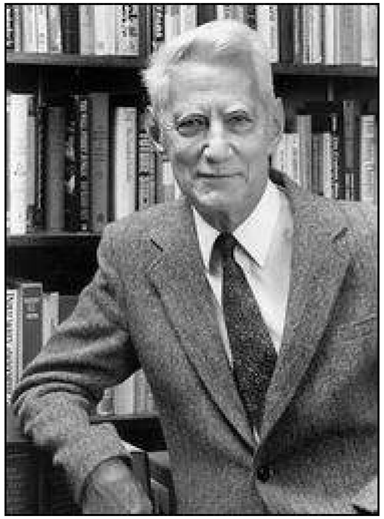
- Nesta apresentação será fornecida uma introdução ao sistema matemático de análise de circuitos lógicos, conhecido como Álgebra de Boole
- Serão vistos os blocos básicos e suas equivalências

José Augusto Baranauskas
Departamento de Computação e Matemática – FFCLRP-USP
augusto@usp.br
http://dcm.fmrp.usp.br/~augusto

Histórico

- Em meados do século XIX o matemático inglês George **Boole** desenvolveu um sistema matemático de análise lógica
- Em meados do século XX, o americano Claude Elwood **Shannon** sugeriu que a Álgebra Booleana poderia ser usada para análise e projeto de circuitos de comutação

George Boole (1815-1864)



Claude Elwood Shannon (1916-2001)

Histórico

- Nos primórdios da eletrônica, todos os problemas eram solucionados por meio de sistemas analógicos
- Com o avanço da tecnologia, os problemas passaram a ser solucionados pela eletrônica digital
- Na eletrônica digital, os sistemas (computadores, processadores de dados, sistemas de controle, codificadores, decodificadores, etc) empregam um pequeno grupo de circuitos lógicos básicos, que são conhecidos como portas **e**, **ou**, **não** e ***flip-flop***
- Com a utilização adequadas dessas portas é possível implementar todas as expressões geradas pela álgebra de Boole

Álgebra Booleana

- Na álgebra de Boole, há somente dois **estados** (**valores** ou **símbolos**) permitidos
  - Estado **0** (zero)
  - Estado **1** (um)
- Em geral
  - O estado zero representa **não**, **falso**, aparelho desligado, ausência de tensão, chave elétrica desligada, etc
  - O estado um representa **sim**, **verdadeiro**, aparelho ligado, presença de tensão, chave ligada, etc

Álgebra Booleana

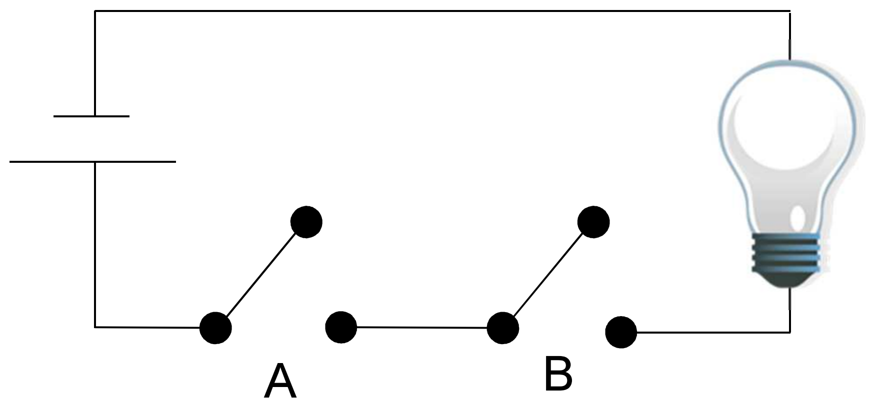
- Assim, na álgebra booleana, se representarmos por 0 uma situação, a situação contrária é representada por 1
- Portanto, em qualquer bloco (porta ou função) lógico somente esses dois estados (0 ou 1) são permitidos em suas entradas e saídas
- Uma variável booleana também só assume um dos dois estados permitidos (0 ou 1)

Álgebra Booleana

- Nesta apresentação trataremos dos seguintes blocos lógicos
  - E (AND)
  - OU (OR)
  - NÃO (NOT)
  - NÃO E (NAND)
  - NÃO OU (NOR)
  - OU EXCLUSIVO (XOR)
- Após, veremos a correspondência entre expressões, circuitos e tabelas verdade
- Por último, veremos a equivalência entre blocos lógicos

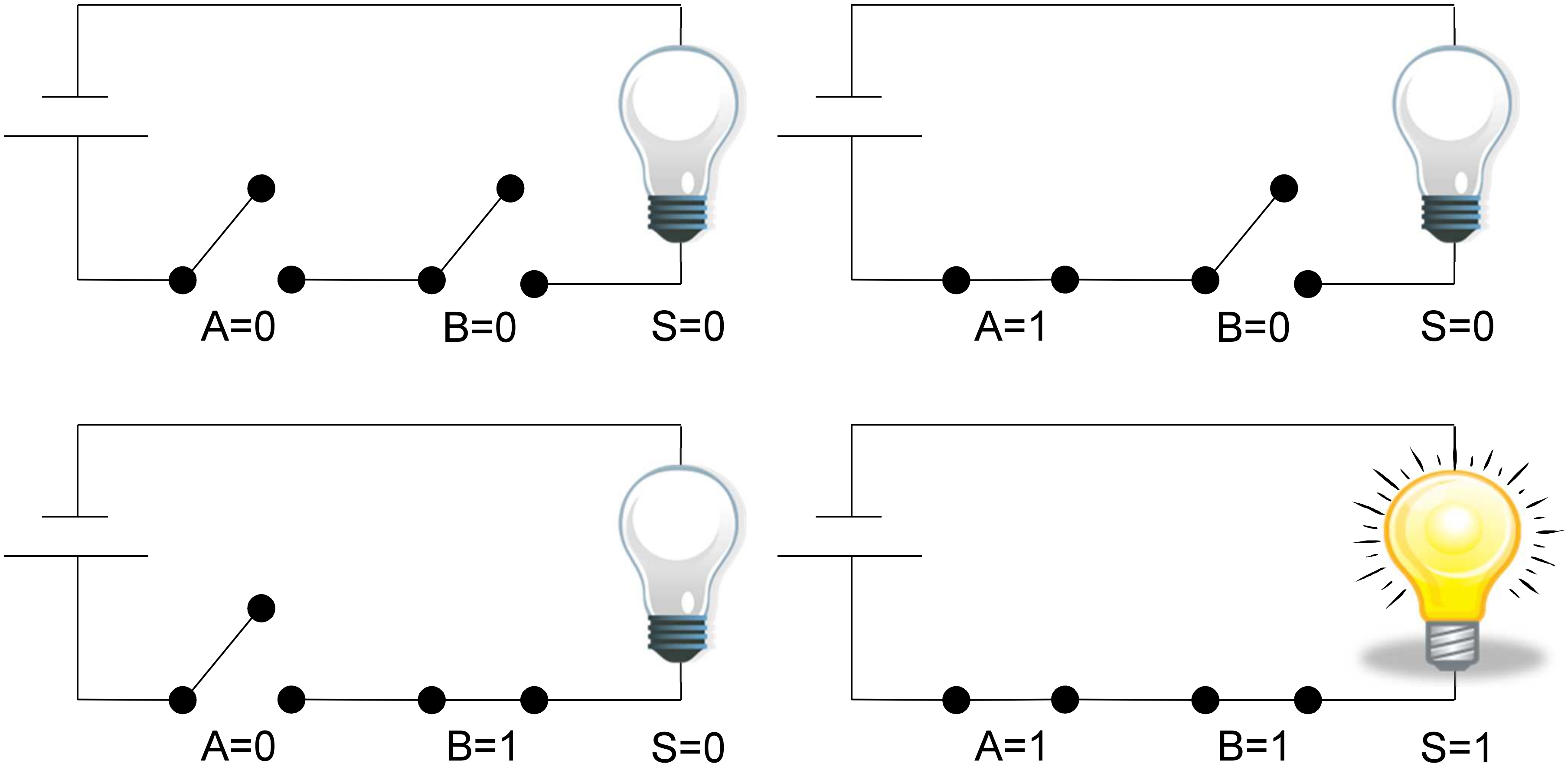
Função **E** (**AND**)

- Executa a **multiplicação** (**conjunção**) booleana de duas ou mais variáveis binárias
- Por exemplo, assuma a convenção no circuito
  - Chave aberta = 0; Chave fechada = 1
  - Lâmpada apagada = 0; Lâmpada acesa = 1



Função **E** (**AND**)

- Situações possíveis:



Função **E** (**AND**)

- Se a chave A está aberta (A=0) e a chave B aberta (B=0), não haverá circulação de energia no circuito, logo a lâmpada fica apagada (S=0)
- Se a chave A está fechada (A=1) e a chave B aberta (B=0), não haverá circulação de energia no circuito, logo a lâmpada fica apagada (S=0)
- Se a chave A está aberta (A=0) e a chave B fechada (B=1), não haverá circulação de energia no circuito, logo a lâmpada fica apagada (S=0)
- Se a chave A está fechada (A=1) e a chave B fechada (B=1), haverá circulação de energia no circuito e a lâmpada fica acesa (S=1)
- Observando todas as quatro situações possíveis (interpretações), é possível concluir que a lâmpada fica acesa somente quando as chaves A e B estiverem simultaneamente fechadas (A=1 e B=1)

Função **E** (**AND**)

- Para representar a expressão
  - S = A **e** B
- Adotaremos a representação
  - S = A**.**B, onde se lê S = A **e** B
- Porém, existem notações alternativas
  - S = A & B
  - S = A, B
  - S = A $\wedge$ B

Tabela Verdade

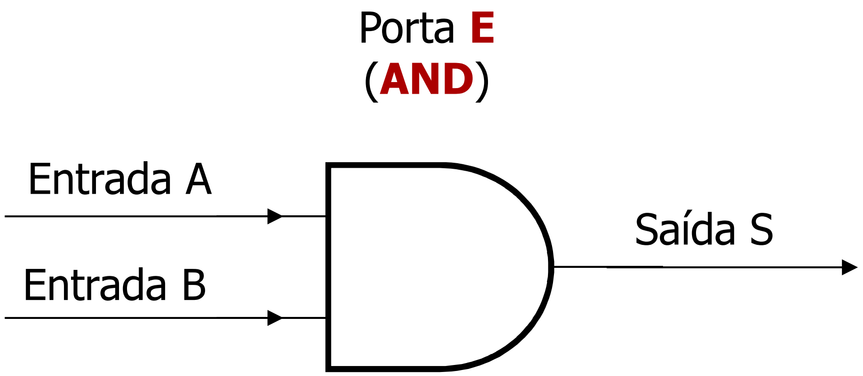
- A tabela verdade é um mapa onde são colocadas todas as possíveis interpretações (situações), com seus respectivos resultados para uma expressão booleana qualquer
- Como visto no exemplo anterior, para 2 variáveis booleanas (A e B), há 4 interpretações possíveis
- Em geral, para *N* variáveis booleanas de entrada, há 2^N interpretações possíveis

Tabela Verdade da Função **E** (**AND**)

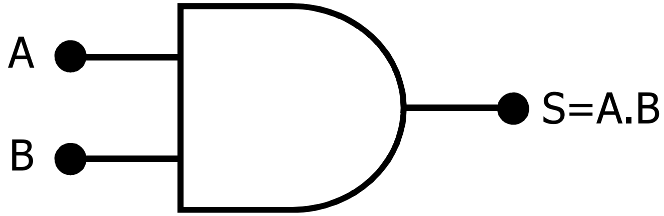
A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

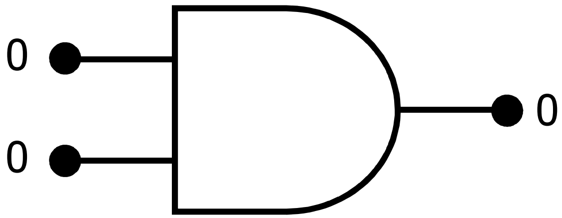
Porta Lógica **E** (**AND**)

- A porta **E** é um circuito que executa a função **E**
- A porta **E** executa a tabela verdade da função **E**
  - Portanto, a saída será 1 somente se ambas as entradas forem iguais a 1; nos demais casos, a saída será 0
- Representação

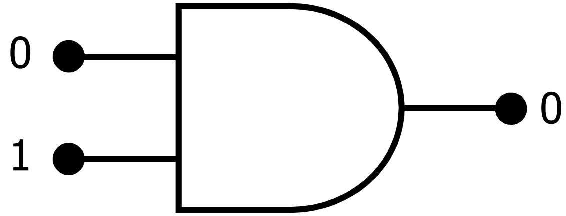


Porta Lógica **E (AND)**

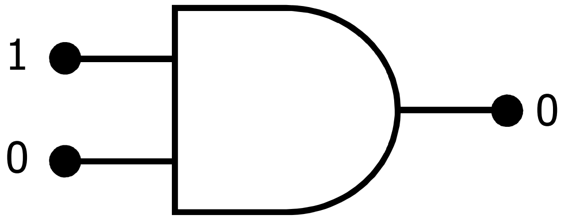




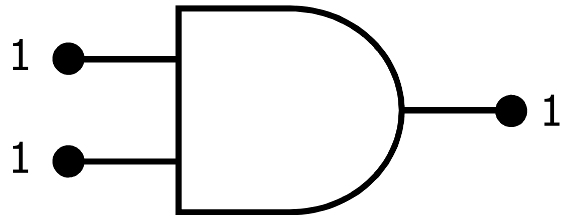
A	B	S=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



A	B	S=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



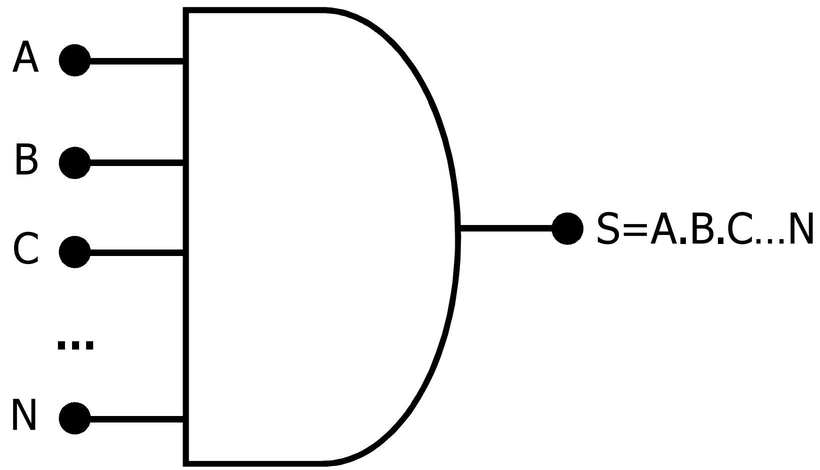
A	B	S=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



A	B	S=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

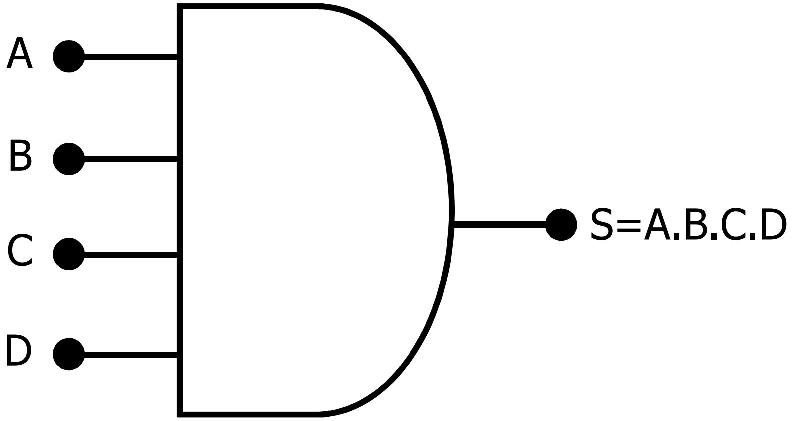
Porta Lógica **E** (**AND**)

- É possível estender o conceito de uma porta **E** para um número qualquer de variáveis de entrada
- Nesse caso, temos uma porta **E** com N entradas e somente uma saída
- A saída será 1 se e somente se as N entradas forem iguais a 1; nos demais casos, a saída será 0



Porta Lógica **E** (**AND**)

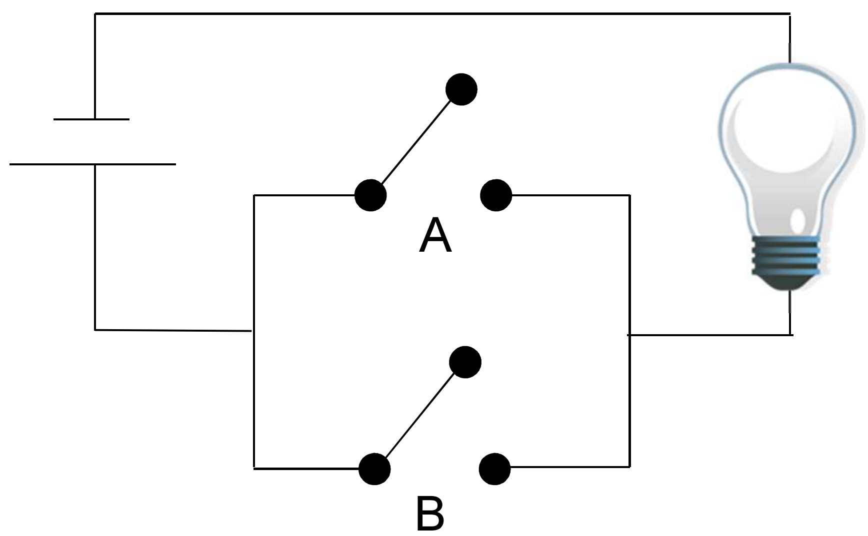
- Por exemplo, S=A.B.C.D



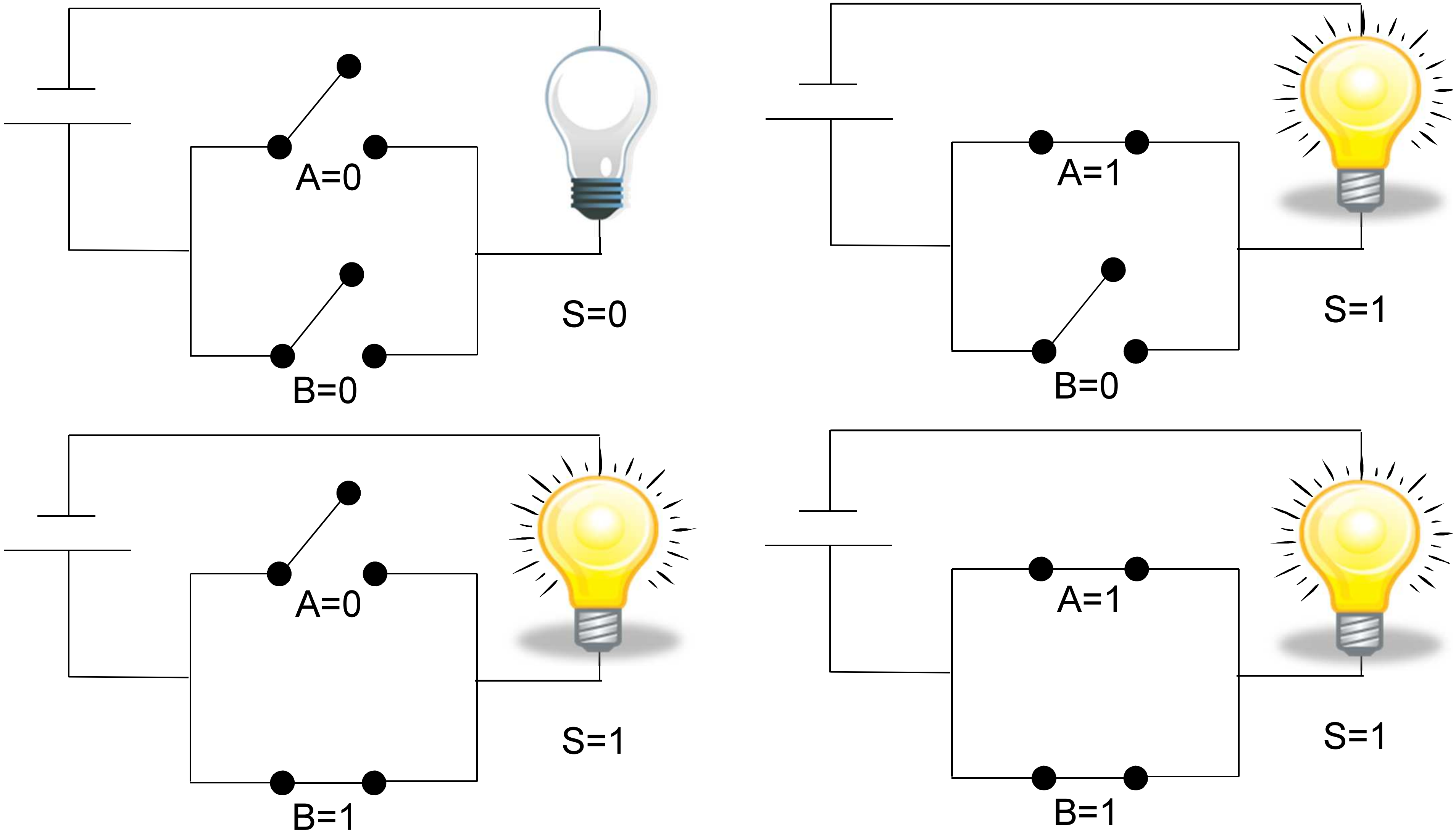
A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Função **OU** (**OR**)

- Executa a **soma** (**disjunção**) booleana de duas ou mais variáveis binárias
- Por exemplo, assuma a convenção no circuito
  - Chave aberta = 0; Chave fechada = 1
  - Lâmpada apagada = 0; Lâmpada acesa = 1



Função **OU** (**OR**)



Função **OU** (**OR**)

- Se a chave A está aberta (A=0) e a chave B aberta (B=0), não haverá circulação de energia no circuito, logo a lâmpada fica apagada (S=0)
- Se a chave A está fechada (A=1) e a chave B aberta (B=0), haverá circulação de energia no circuito e a lâmpada fica acesa (S=1)
- Se a chave A está aberta (A=0) e a chave B fechada (B=1), haverá circulação de energia no circuito e a lâmpada fica acesa (S=1)
- Se a chave A está fechada (A=1) e a chave B fechada (B=1), haverá circulação de energia no circuito e a lâmpada fica acesa (S=1)
- Observando todas as quatro situações possíveis, é possível concluir que a lâmpada fica acesa somente quando a chave A ou a chave B ou ambas estiverem fechadas

Função **OU** (**OR**)

- Para representar a expressão
  - S = A **ou** B
- Adotaremos a representação
  - S = A**+**B, onde se lê S = A **ou** B
- Porém, existem notações alternativas
  - S = A | B
  - S = A; B
  - $S = A \vee B$

Tabela Verdade da Função **OU** (**OR**)

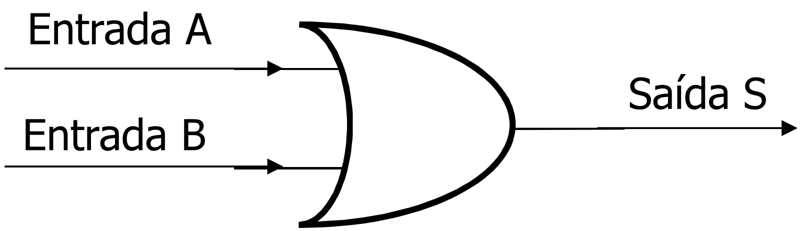
- Observe que, no sistema de numeração binário, a soma 1+1=10
- Na álgebra booleana, 1+1=1, já que somente dois valores são permitidos (0 e 1)

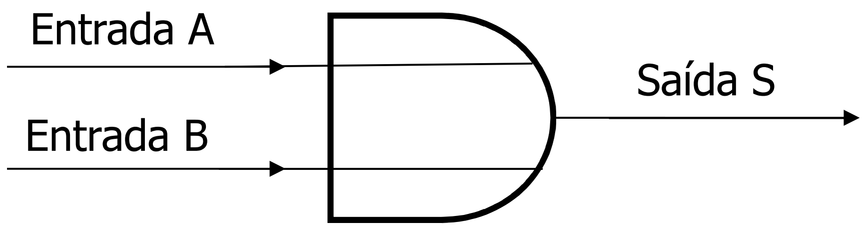
A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Porta Lógica **OU** (**OR**)

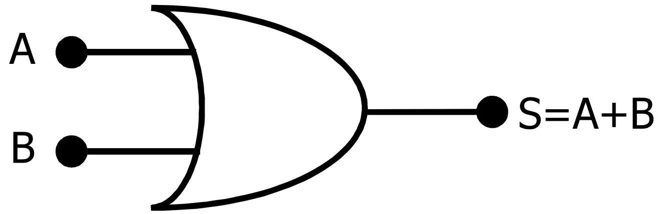
- A porta **OU** é um circuito que executa a função **OU**
- A porta **OU** executa a tabela verdade da função **OU**
  - Portanto, a saída será 0 somente se ambas as entradas forem iguais a 0; nos demais casos, a saída será 1
- Representação

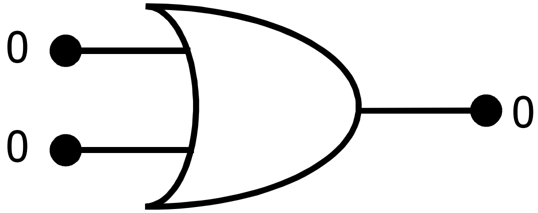
Porta **OU**
(**OR**)



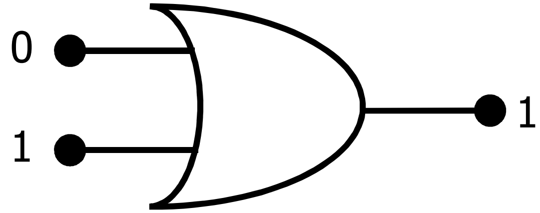


Porta Lógica **OU** (**OR**)

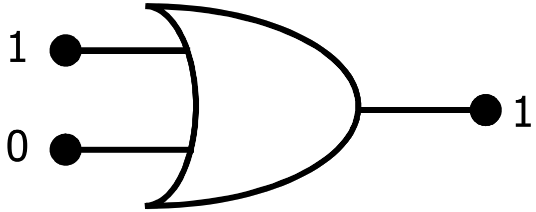




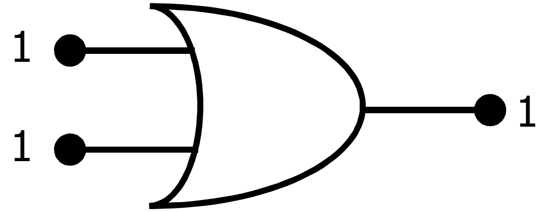
A	B	S=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



A	B	S=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



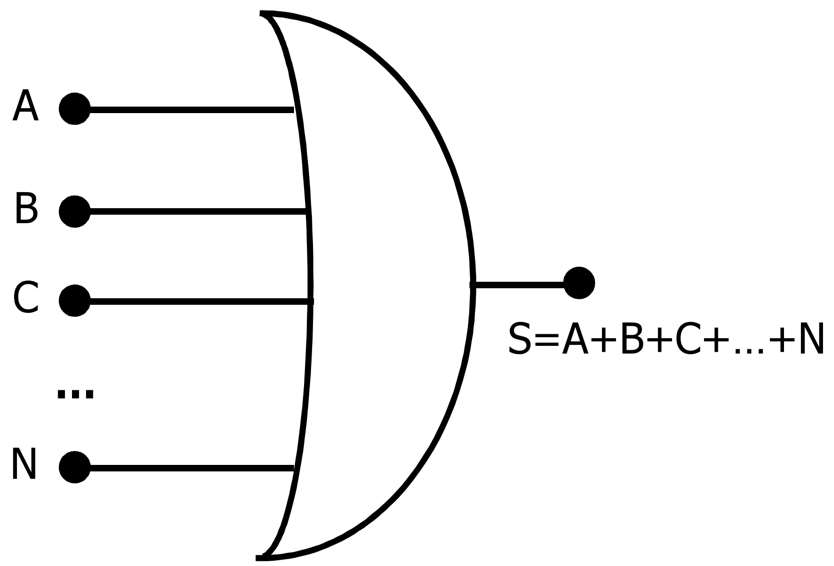
A	B	S=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



A	B	S=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

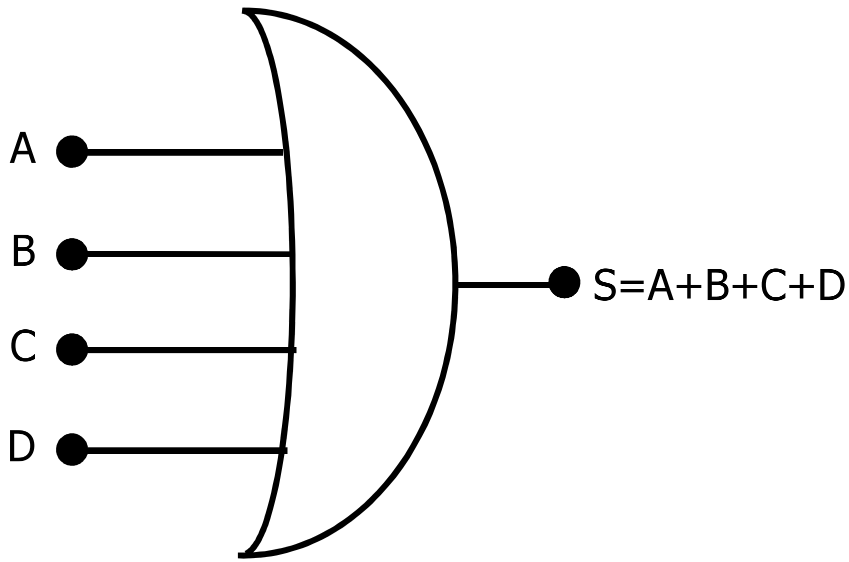
Porta Lógica **OU** (**OR**)

- É possível estender o conceito de uma porta **OU** para um número qualquer de variáveis de entrada
- Nesse caso, temos uma porta **OU** com N entradas e somente uma saída
- A saída será 0 se e somente se as N entradas forem iguais a 0; nos demais casos, a saída será 1



Porta Lógica **OU** (**OR**)

- Por exemplo,
  $S=A+B+C+D$



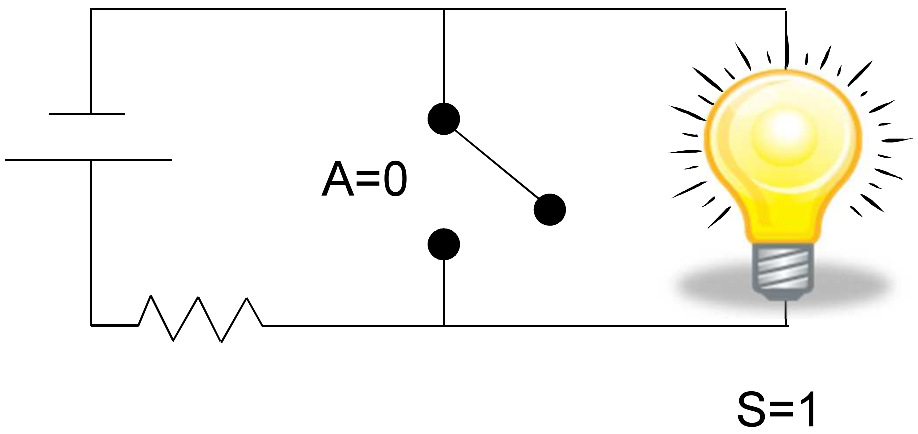
A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

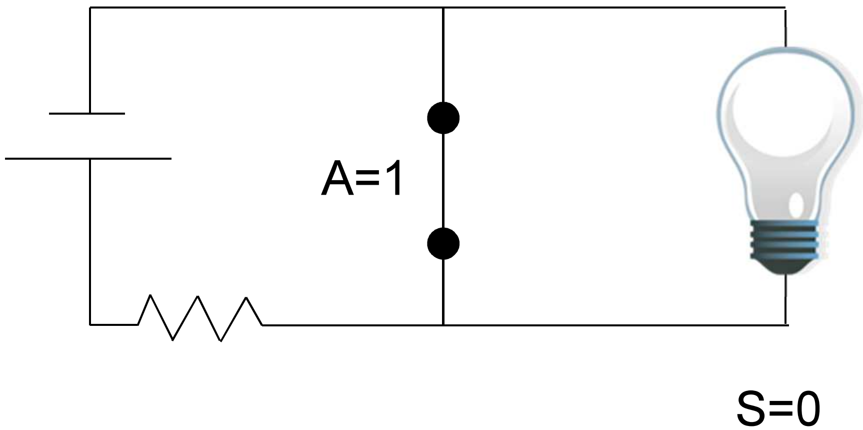
Função **NÃO** (**NOT**)

- Executa o **complemento** (**negação**) de uma variável binária
  - Se a variável estiver em 0, o resultado da função é 1
  - Se a variável estiver em 1, o resultado da função é 0
- Essa função também é chamada de **inversora**

Função **NÃO** (**NOT**)

- Usando as mesmas convenções dos circuitos anteriores, tem-se que:
  - Quando a chave A está aberta (A=0), passará corrente pela lâmpada e ela acenderá (S=1)
  - Quando a chave A está fechada (A=1), a lâmpada estará em curto-circuito e não passará corrente por ela, ficando apagada (S=0)





Função **NÃO** (**NOT**)

- Para representar a expressão
  - S = **não** A
- Adotaremos a representação
  - $S = \bar{A}$, onde se lê S = **não** A
- Notações alternativas
  - $S = A'$
  - $S = \neg A$
  - $S = \tilde{A}$

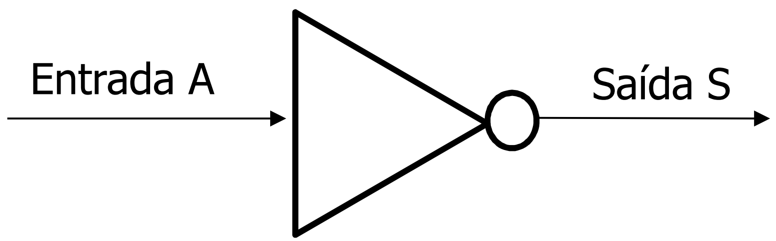
- Tabela verdade da função **NÃO** (**NOT**)

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

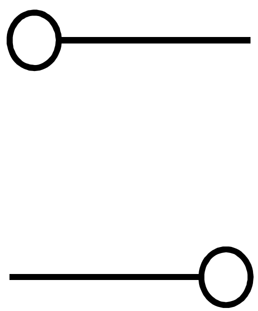
Porta Lógica **NÃO** (**NOT**)

- A porta lógica **NÃO**, ou **inversor**, é o circuito que executa a função **NÃO**
- O inversor executa a tabela verdade da função **NÃO**
  - Se a entrada for 0, a saída será 1; se a entrada for 1, a saída será 0
- Representação

Porta **NÃO** (**NOT**)



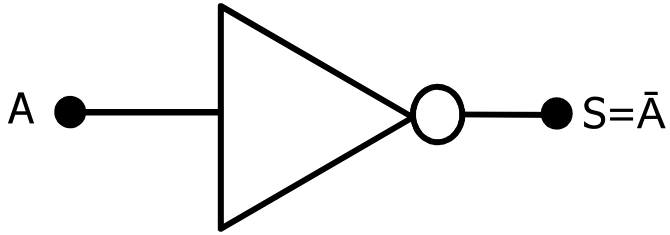
Alternativamente,

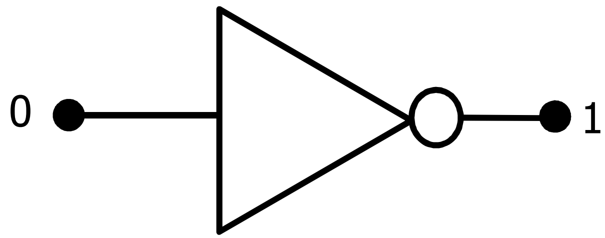


Após um bloco lógico

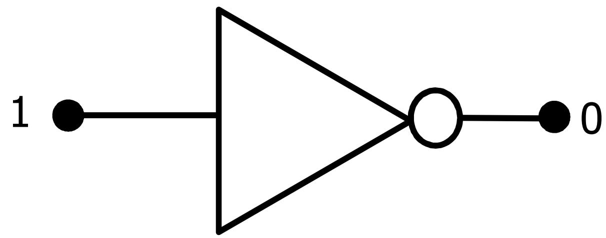
Antes de um bloco lógico

Porta Lógica **NÃO** (**NOT**)





A	S=Ā
0	1
1	0



A	S=Ā
0	1
1	0

Função **NÃO E** (**NAND**)

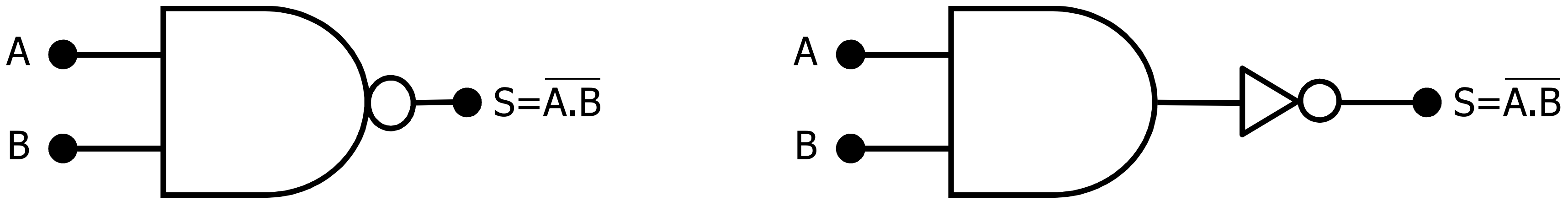
- Composição da função **E** com a função **NÃO**, ou seja, a saída da função **E** é invertida
- S $= \overline{(A.B)} = \overline{A.B}$
  $= (A.B)'$
  $= \neg(A.B)$

- Tabela verdade

A	B	$S=\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

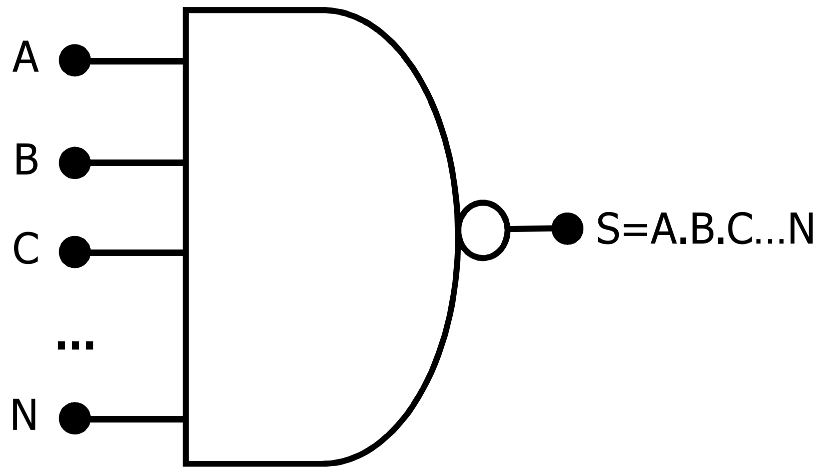
Porta **NÃO E** (**NAND**)

- A porta **NÃO E** (**NE**) é o bloco lógico que executa a função **NÃO E**, ou seja, sua tabela verdade
- Representação



Porta **NÃO E** (**NAND**)

- Como a porta **E**, a porta **NÃO E** pode ter duas ou mais entradas
- Nesse caso, temos uma porta **NÃO E** com N entradas e somente uma saída
- A saída será 0 se e somente se as N entradas forem iguais a 1; nos demais casos, a saída será 1



Função **NÃO OU** (**NOR**)

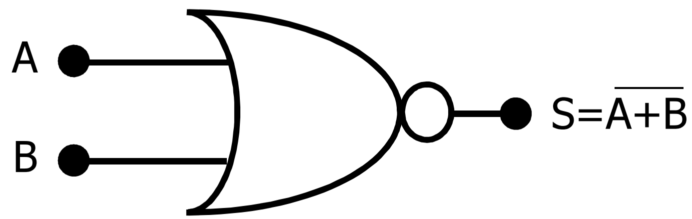
- Composição da função **OU** com a função **NÃO**, ou seja, a saída da função **OU** é invertida
- S $= (\overline{A+B}) = \overline{A+B}$
  $= (A+B)'$
  $= \neg(A+B)$

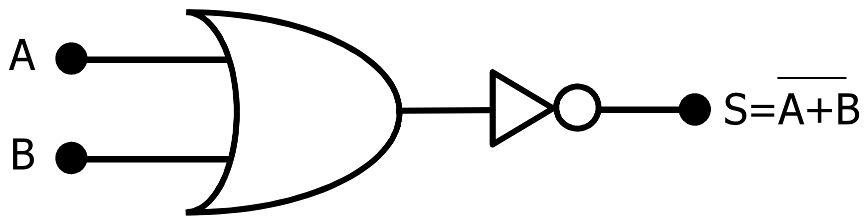
- Tabela verdade

A	B	$S=\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Porta **NÃO OU** (**NOR**)

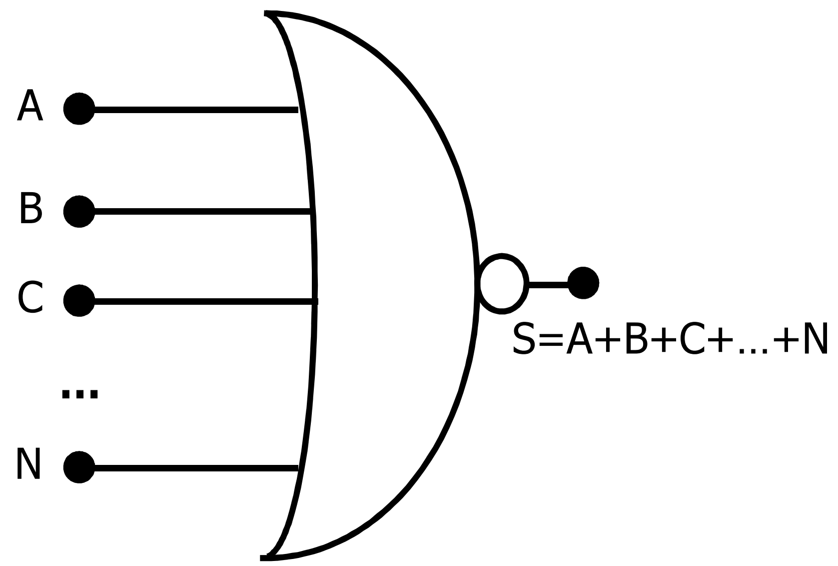
- A porta **NÃO OU** (**NOU**) é o bloco lógico que executa a função **NÃO OU**, ou seja, sua tabela verdade
- Representação





Porta **NÃO OU** (**NOR**)

- Como a porta **OU**, a porta **NÃO OU** pode ter duas ou mais entradas
- Nesse caso, temos uma porta **NÃO OU** com N entradas e somente uma saída
- A saída será 1 se e somente se as N entradas forem iguais a 0; nos demais casos, a saída será 0



Função **OU Exclusivo** (**XOR**)

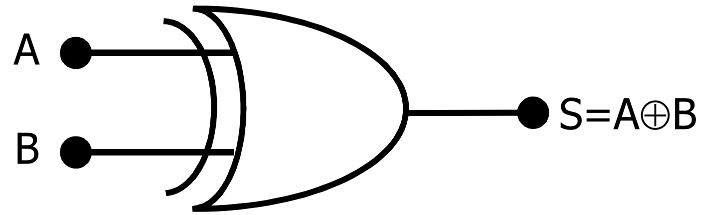
- A função **OU Exclusivo** fornece
  - 1 na saída quando as entradas forem diferentes entre si e
  - 0 caso contrário
- $S = A \oplus B$
  $= \bar{A}.B + A.\bar{B}$

- Tabela verdade

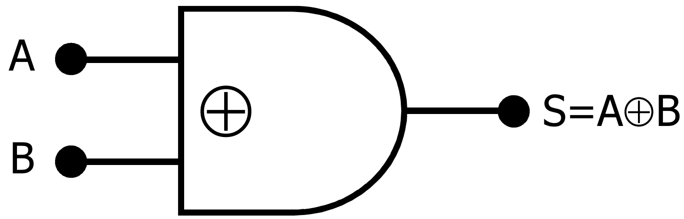
A	B	$S=A\oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

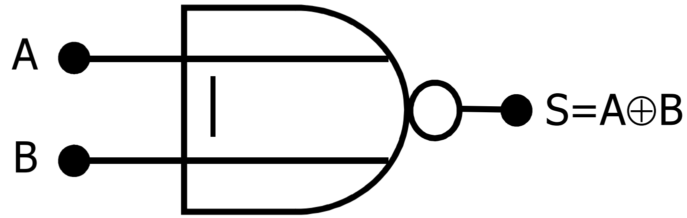
Porta **OU Exclusivo** (**XOR**) como Bloco Básico

Simbologia adotada

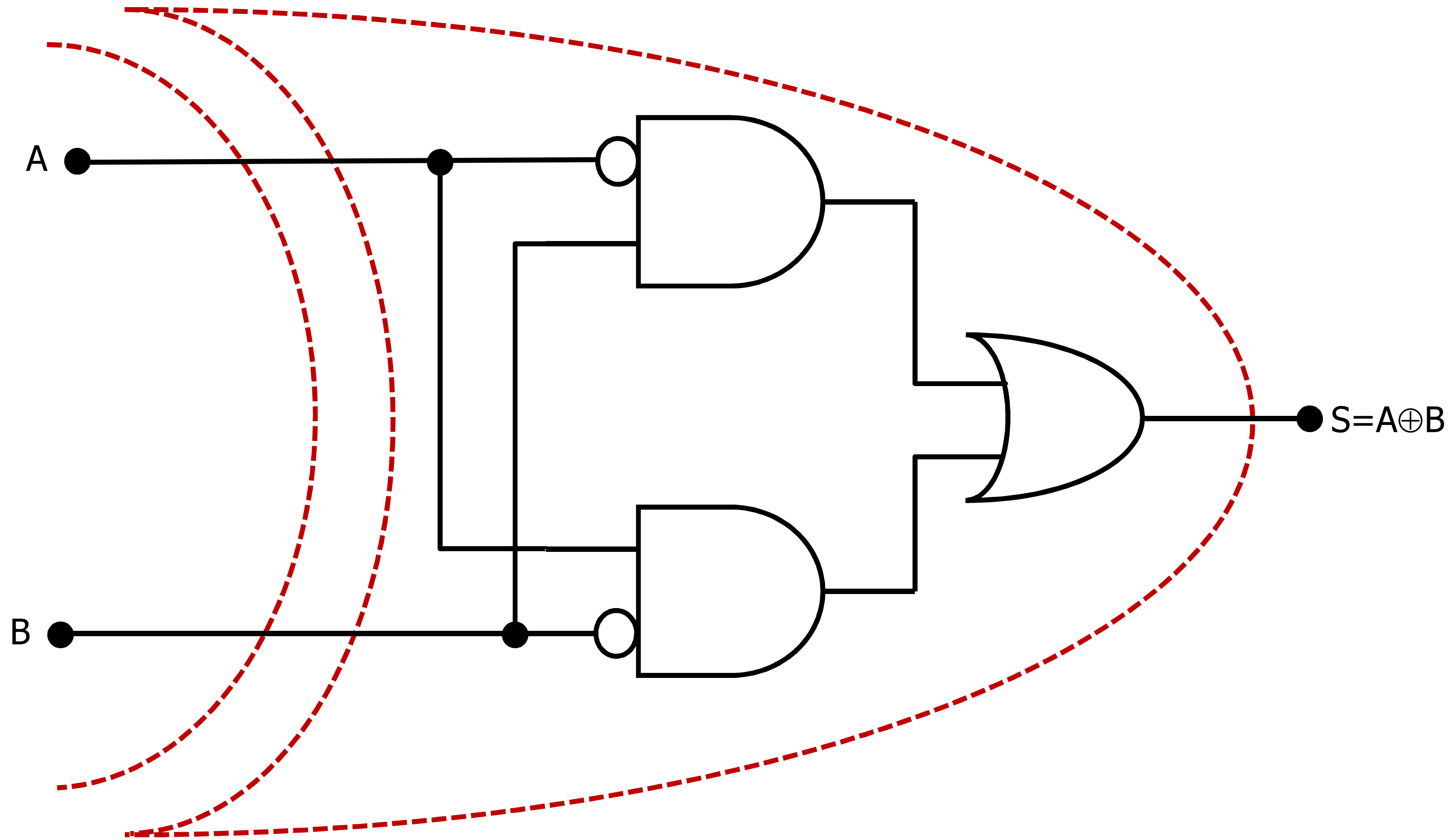


Outros símbolos utilizados

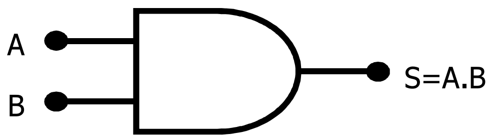
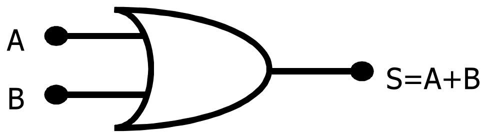
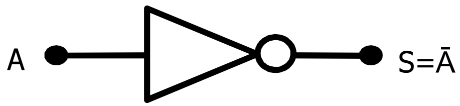
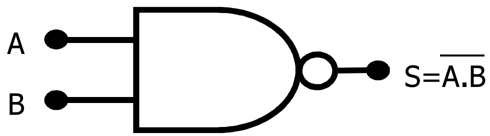
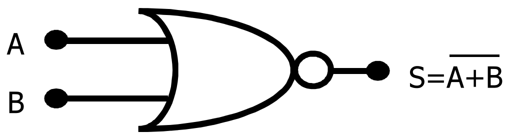
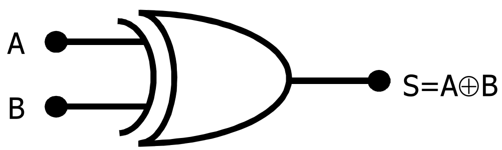




Porta **OU Exclusivo** (**XOR**) como Circuito Combinacional



Resumo dos Blocos Lógicos Básicos

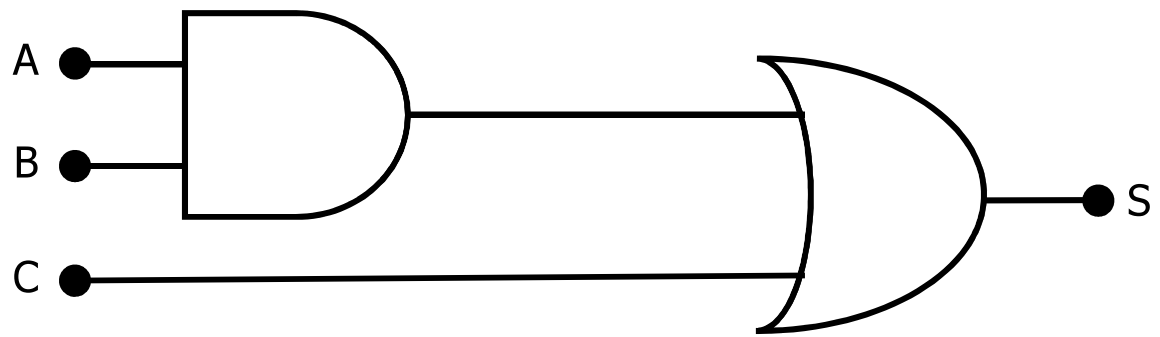
Nome	Símbolo Gráfico	Função Algébrica	Tabela Verdade
E (AND)		S=A.B S=AB	A B S=A.B 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
OU (OR)		S=A+B	A B S=A+B 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
NÃO (NOT) Inversor		$S=\bar{A}$ S=A' $S= \neg A$	A $S=\bar{A}$ 0 1 1 0
NE (NAND)		$S=\overline{A.B}$ S=(A.B)' $S= \neg(A.B)$	A B $S=\overline{A.B}$ 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NOU (NOR)		$S=\overline{A+B}$ S=(A+B)' $S= \neg(A+B)$	A B $S=\overline{A+B}$ 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
XOR		$S=A\oplus B$	A B $S=A\oplus B$ 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0

Correspondência entre expressões, circuitos e tabelas verdade

- Todo circuito lógico executa uma expressão booleana
- Um circuito, por mais complexo que seja, é composto pela interligação dos blocos lógicos básicos
- Veremos, a seguir, como obter as expressões booleanas geradas por um circuito lógico

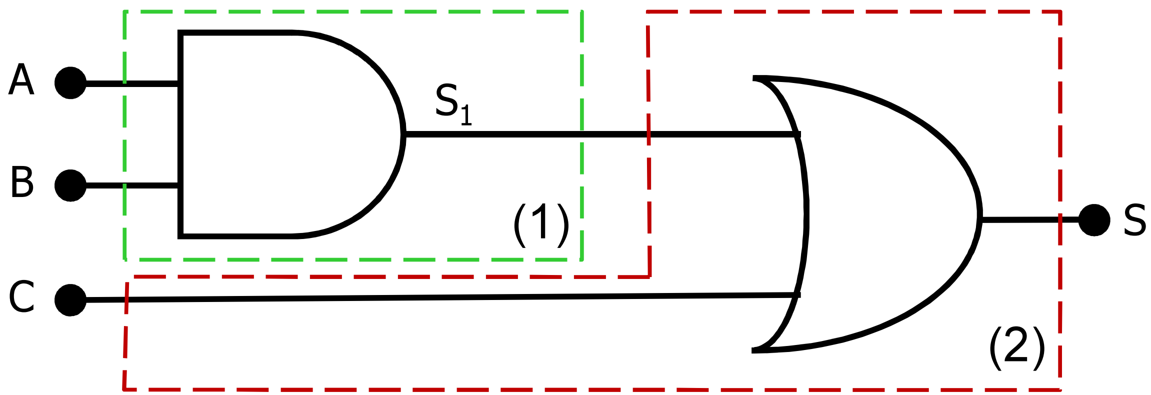
Expressões Booleanas Geradas por Circuitos Lógicos

- Seja o circuito:



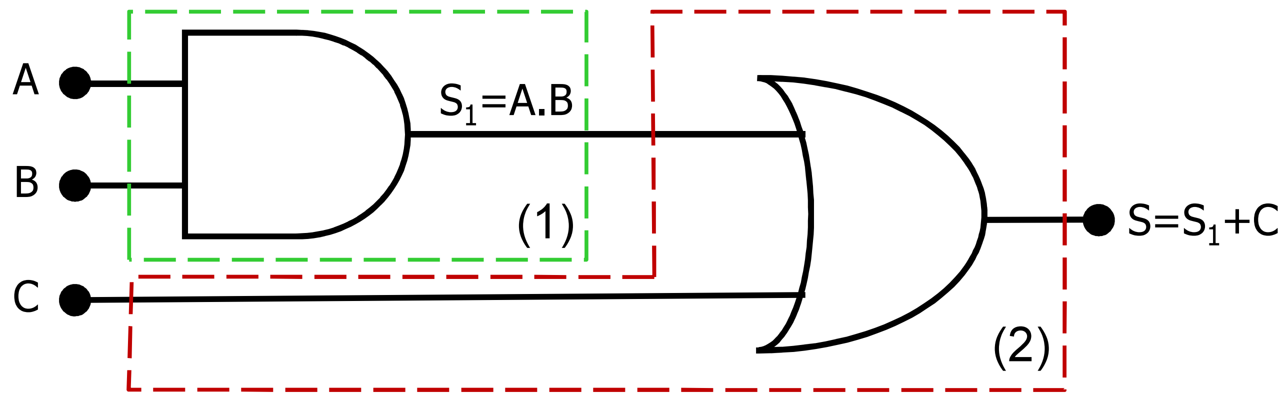
Expressões Booleanas Geradas por Circuitos Lógicos

- Vamos dividi-lo em duas partes (1) e (2)
  - No circuito (1), a saída S_1 contém o produto A.B, já que o bloco é uma porta **E**
  - Portanto, S_1 = A.B



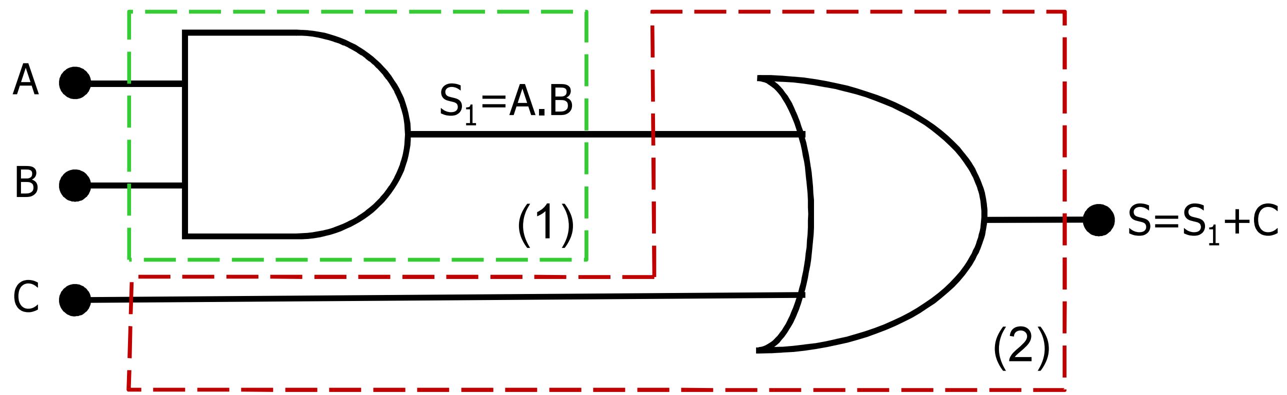
Expressões Booleanas Geradas por Circuitos Lógicos

- No circuito (2), note que a saída S_1 é utilizada como uma das entradas da porta **OU**
- A outra entrada da porta **OU** corresponde à variável C, o que nos leva à:
  - $S = S_1 + C$



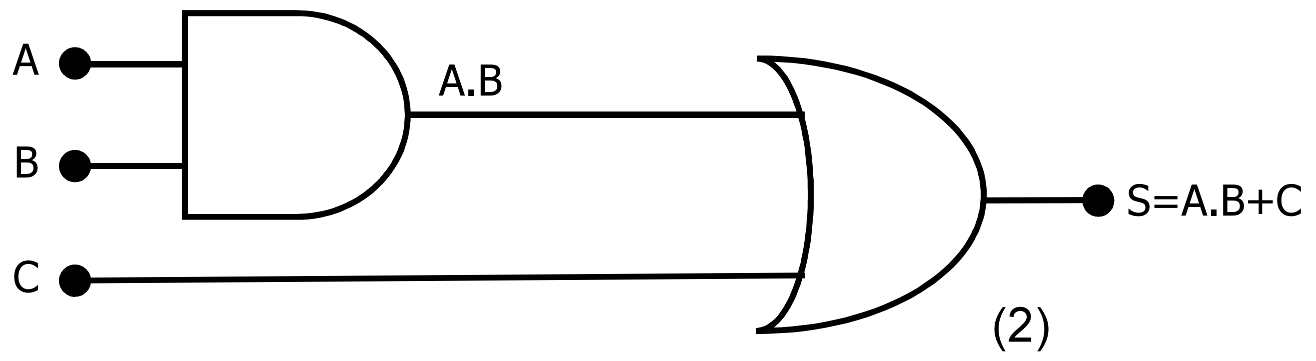
Expressões Booleanas Geradas por Circuitos Lógicos

- Para obter a expressão final em relação às entradas A, B e C basta substituir a expressão S_1 na expressão de S, ou seja:
  - (1) $S_1 = A.B$
  - (2) $S = S_1 + C$
  - Obtém-se $S = S_1 + C = (A.B) + C$



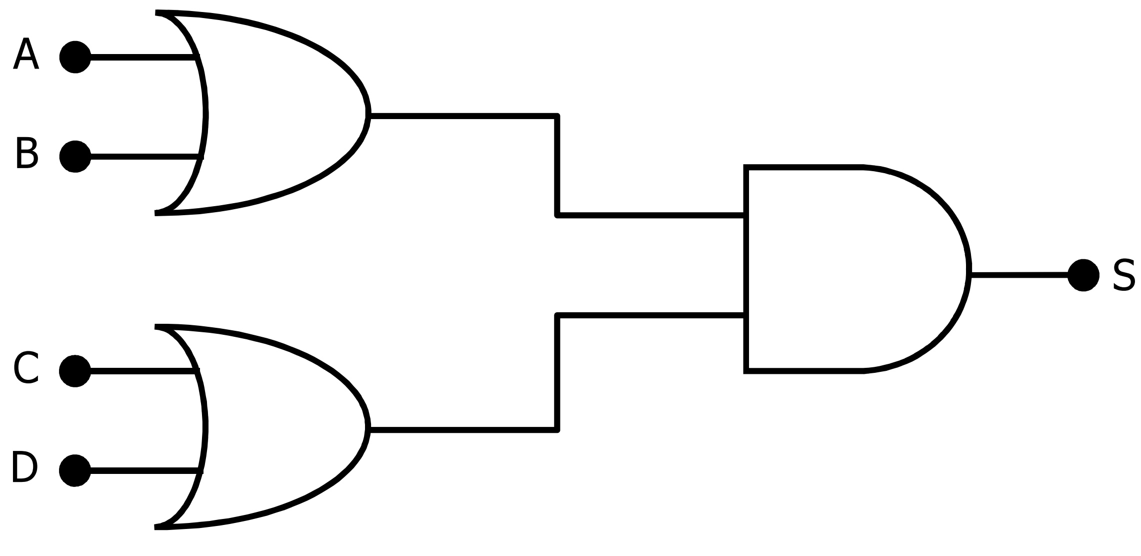
Expressões Booleanas Geradas por Circuitos Lógicos

- Portanto, a expressão que o circuito executa é:
  - S = (A.B) + C = A.B + C

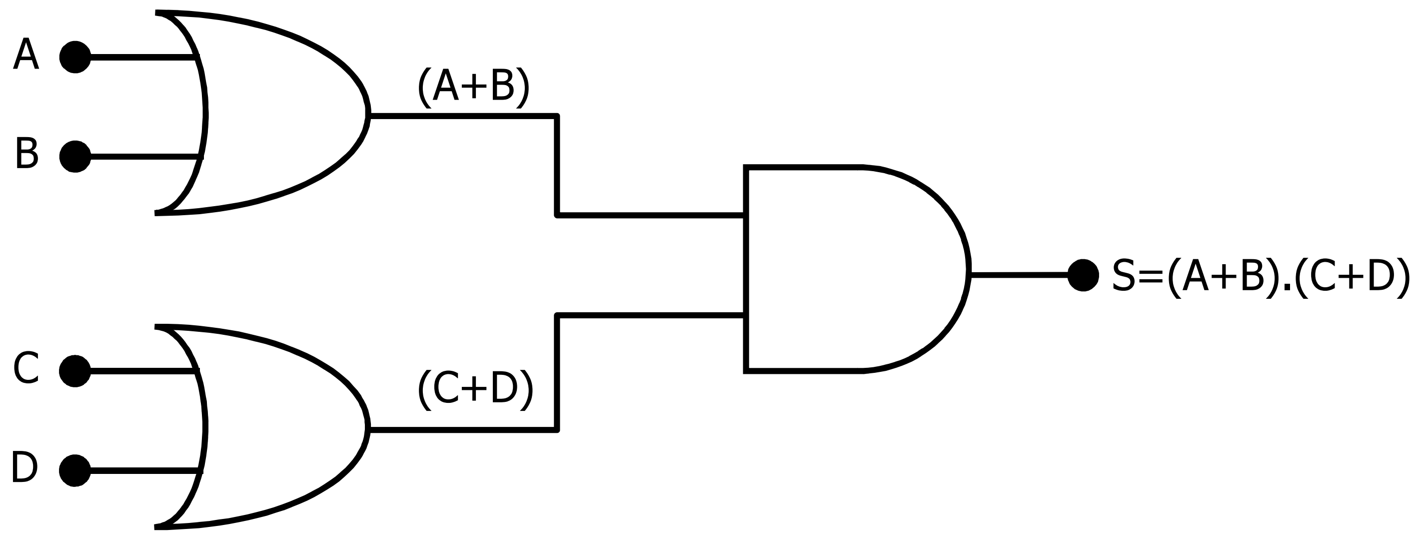


Exercício

- Escreva a expressão booleana executada pelo circuito

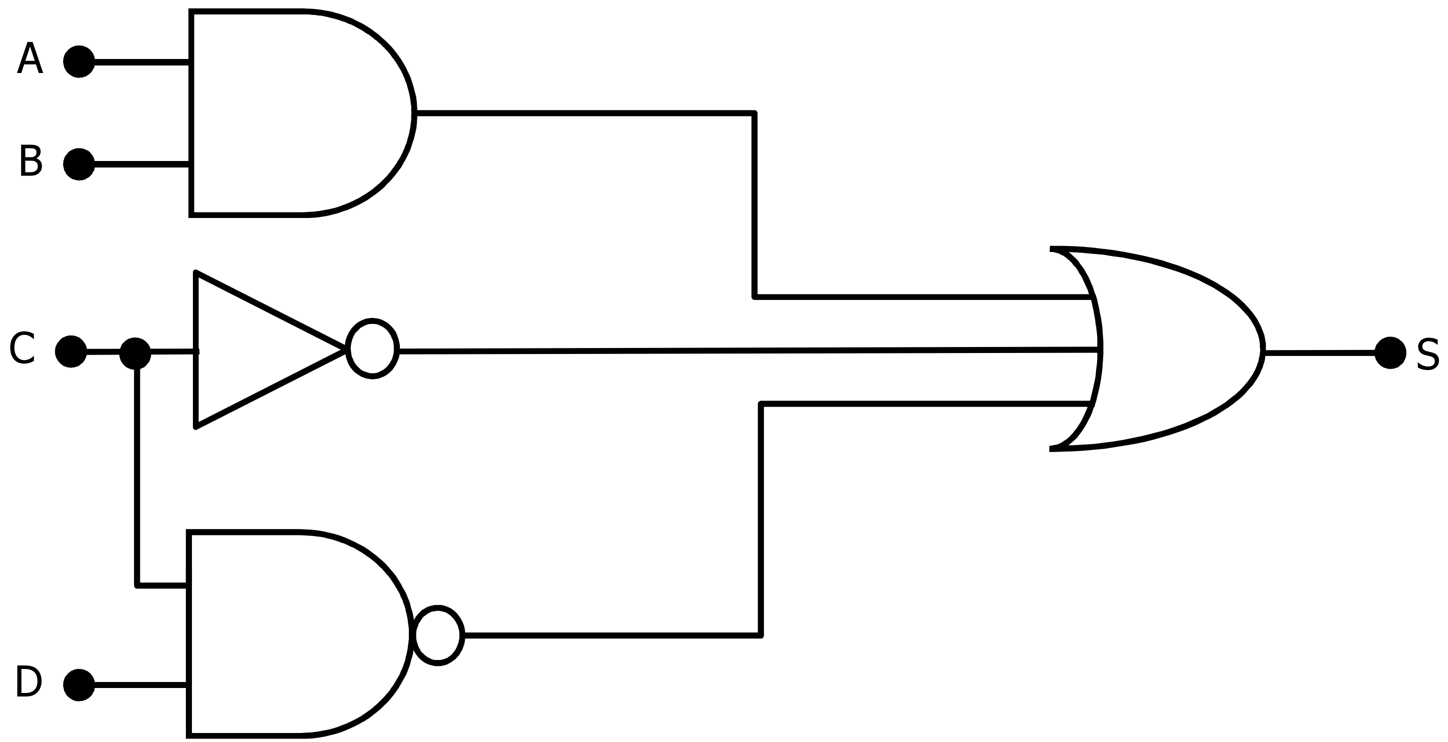


Solução

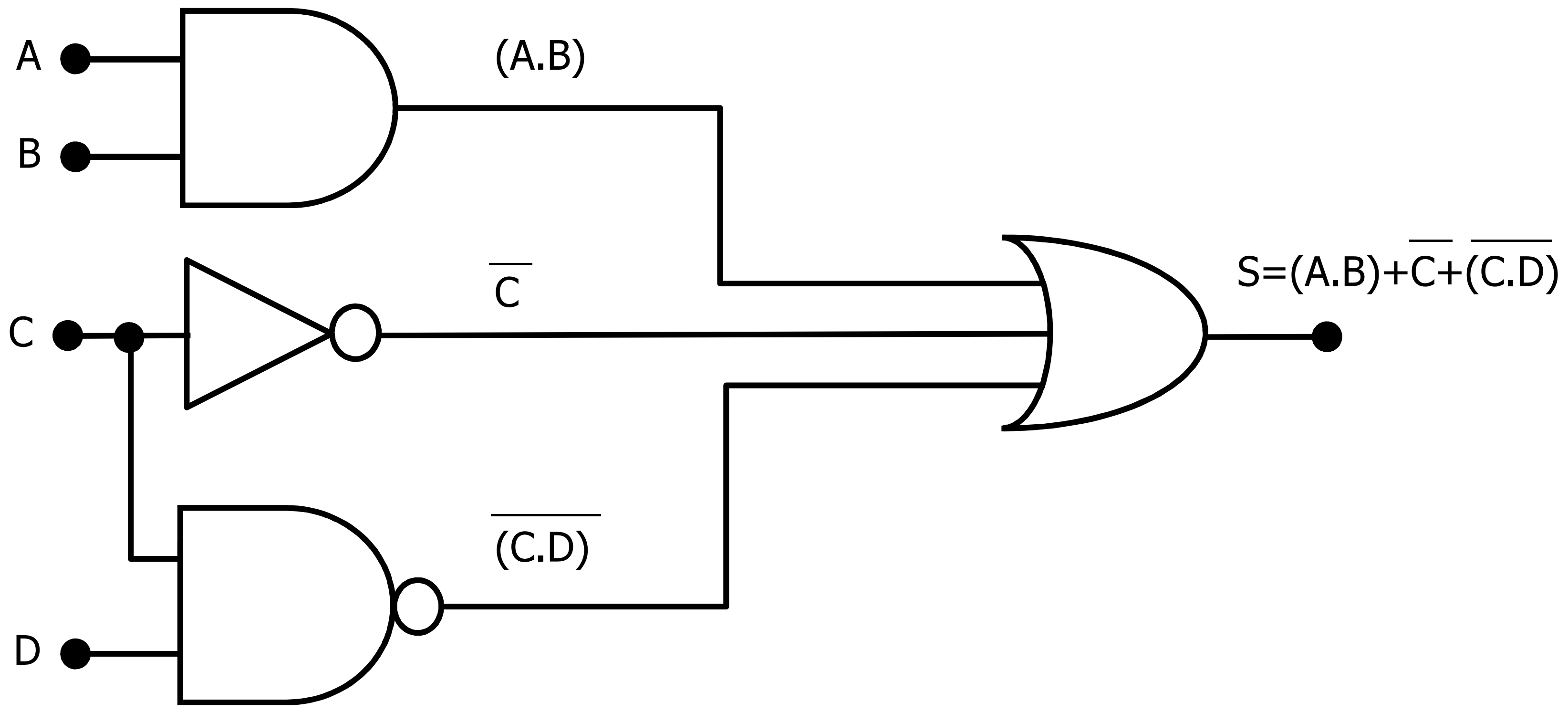


Exercício

- Determinar a expressão booleana característica do circuito



Solução



Circuitos Gerados por Expressões Booleanas

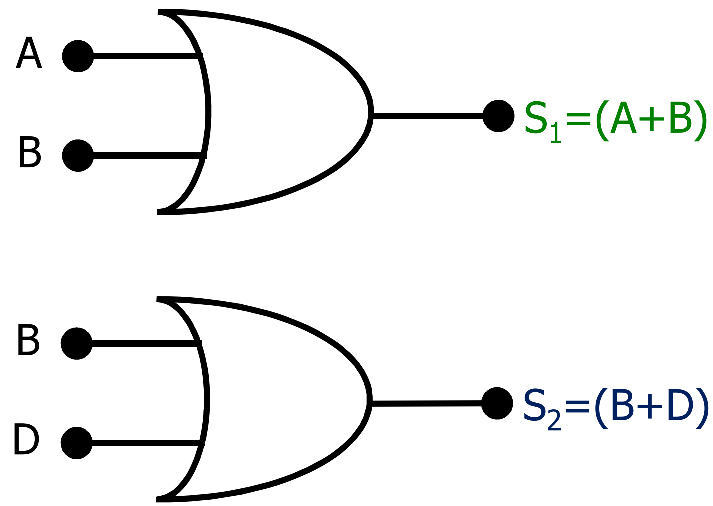
- Até o momento, vimos como obter uma expressão característica a partir de um circuito
- Também é possível obter um circuito lógico, dada uma expressão booleana
- Nesse caso, como na aritmética elementar, parênteses têm maior prioridade, seguidos pela multiplicação (função **E**) e, por último, pela soma (função **OU**)

Circuitos Gerados por Expressões Booleanas

- Seja a expressão
  - S = (A+B).C.(B+D)
- Vamos separar as subfórmulas da expressão, ou seja:
  - S = (A+B) . C . (B+D)

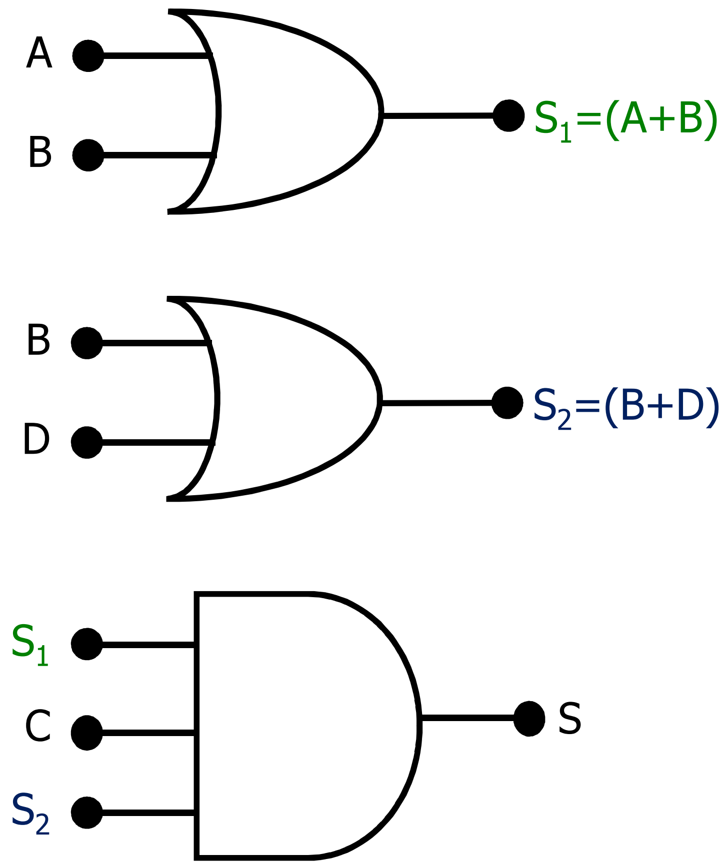
Circuitos Gerados por Expressões Booleanas

- Seja a expressão
  - S = (A+B).C.(B+D)
- Vamos separar as subfórmulas da expressão, ou seja:
  - S = (A+B) . C . (B+D)
- Dentro do primeiro parêntese temos a soma booleana $S_1=(A+B)$, portanto o circuito que executa esse parêntese será uma porta **OU**
- Dentro do segundo parêntese temos a soma booleana $S_2=(B+D)$. Novamente, o circuito que executa esse parêntese será uma porta **OU**



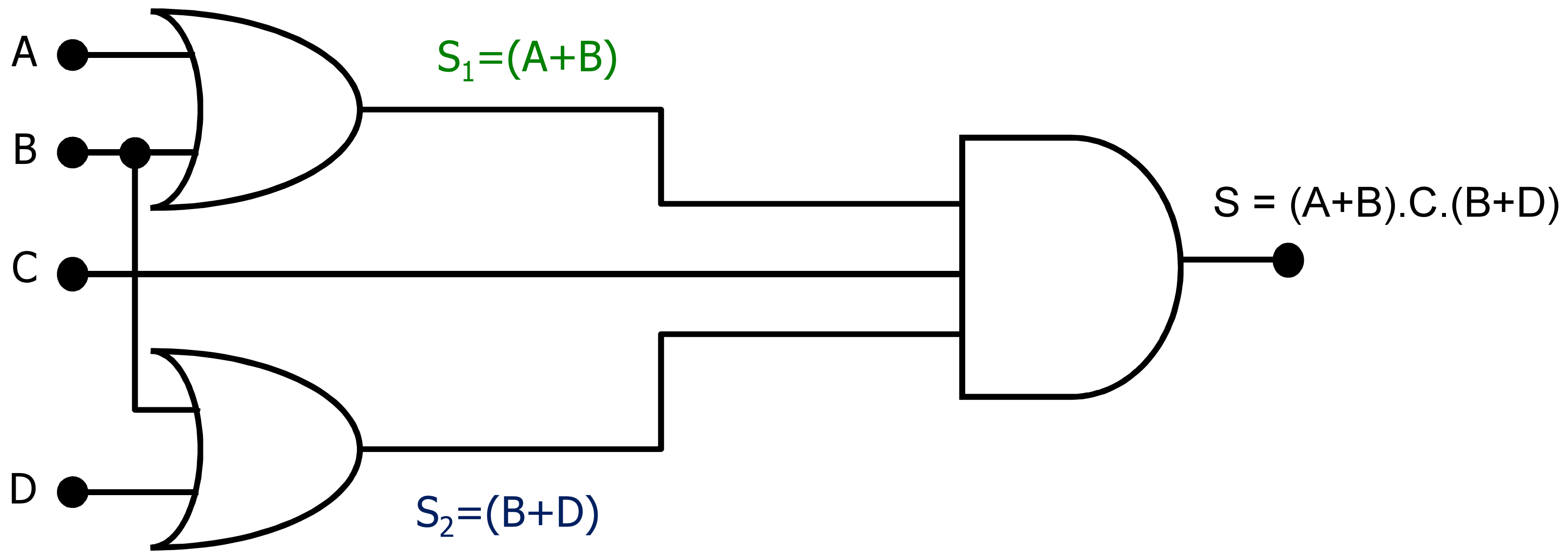
Circuitos Gerados por Expressões Booleanas

- Seja a expressão
  - S = (A+B).C.(B+D)
- Vamos separar as subfórmulas da expressão, ou seja:
  - S = (A+B) . C . (B+D)
- Dentro do primeiro parêntese temos a soma booleana S_1=(A+B), portanto o circuito que executa esse parêntese será uma porta **OU**
- Dentro do segundo parêntese temos a soma booleana S_2=(B+D). Novamente, o circuito que executa esse parêntese será uma porta **OU**
- Portanto, temos:
  - S = S_1 . C . S_2
- Agora temos uma multiplicação booleana e o circuito que a executa é uma porta **E**



Circuitos Gerados por Expressões Booleanas

- O circuito completo é:

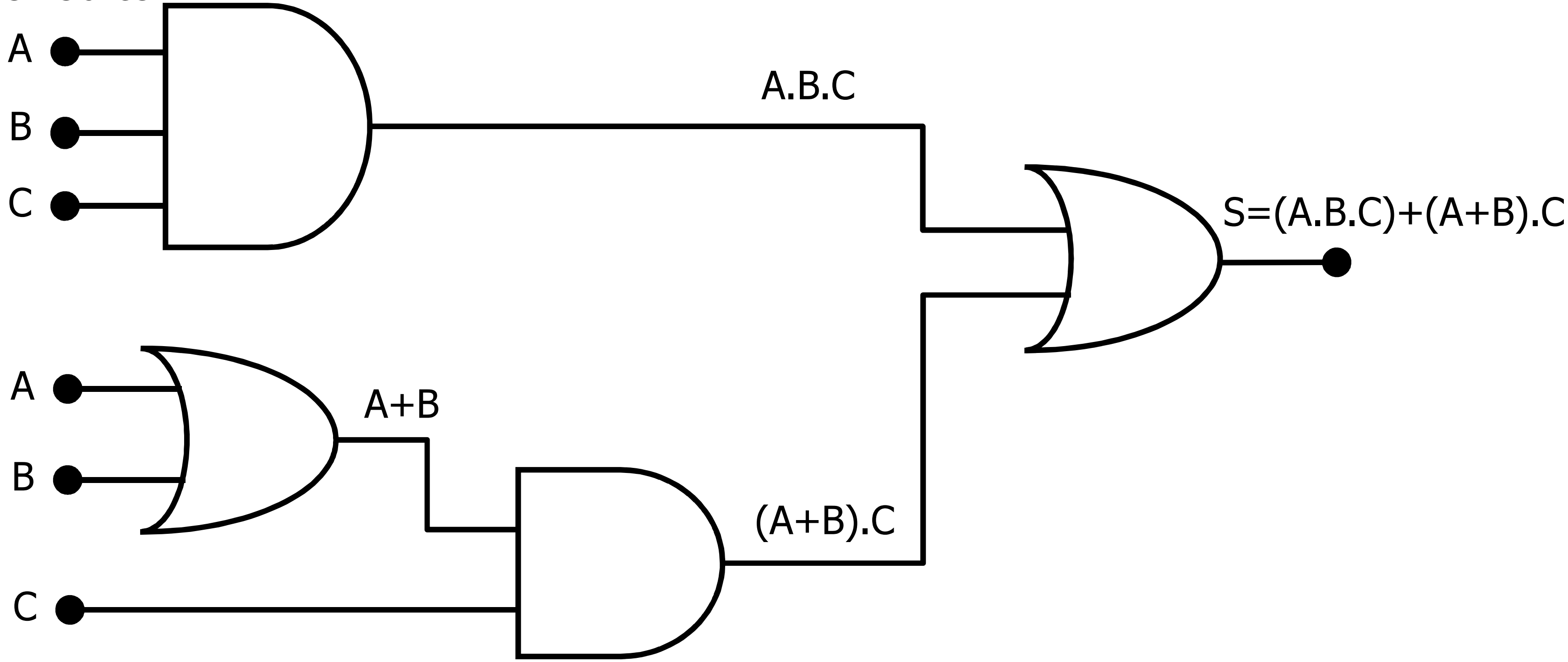


Exercício

- Desenhe o circuito lógico que executa a seguinte expressão booleana
  - $S = (A.B.C) + (A+B).C$

Solução

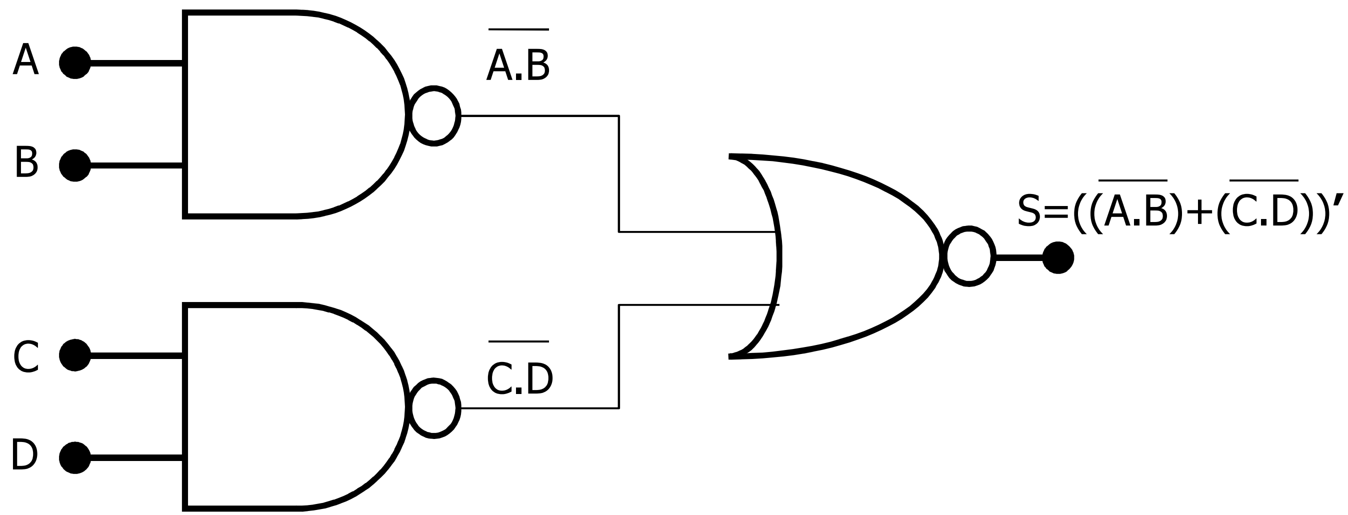
- É importante lembrar que as entradas que representam a mesma variável estão interligadas
- Contudo o desenho sem interligações facilita a interpretação do circuito



Exercício

- Desenhe o circuito lógico cuja expressão característica é
  - $S = (\overline{A.B} + \overline{C.D})'$

Solução



Expressões ou Circuitos representados por Tabelas Verdade

- Uma forma de estudar uma função booleana consiste em utilizar sua tabela verdade
- Como visto anteriormente, há uma equivalência entre o circuito lógico e sua expressão característica
  - Podemos obter um circuito a partir de sua expressão
  - Podemos obter expressões a partir dos circuitos
- Uma tabela verdade representa o comportamento tanto do circuito como de sua expressão característica

Como obter a Tabela Verdade a partir de uma Expressão

- Colocar todas as possibilidades (interpretações) para as variáveis de entrada
  - Lembrar que para N variáveis, há 2^N possibilidades
- Adicionar colunas para cada subfórmula da expressão
  - Preencher cada coluna com seus resultados
- Adicionar uma coluna para o resultado final
  - Preencher essa coluna com o resultado final

Exemplo

- Considere a expressão
  - S = A.B.C + A.D + A.B.D
- Como há 4 variáveis de entrada (A, B, C, D), há 2^4=16 interpretações
  - Variação 1 zero, 1 um

A	B	C	D
			0
			1
			0
			1
			0
			1
			0
			1
			0
			1
			0
			1
			0
			1
			0
			1

Exemplo

- Considere a expressão
  - S = A.B.C + A.D + A.B.D
- Como há 4 variáveis de entrada (A, B, C, D), há 2^4=16 interpretações
  - Variação 1 zero, 1 um
  - Variação 2 zeros, 2 um

A	B	C	D
		0	0
		0	1
		1	0
		1	1
		0	0
		0	1
		1	0
		1	1
		0	0
		0	1
		1	0
		1	1
		0	0
		0	1
		1	0
		1	1

Exemplo

- Considere a expressão
  - S = A.B.C + A.D + A.B.D
- Como há 4 variáveis de entrada (A, B, C, D), há 2^4=16 interpretações
  - Variação 1 zero, 1 um
  - Variação 2 zeros, 2 um
  - Variação 4 zeros, 4 um

A	B	C	D
	0	0	0
	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
	1	0	0
	1	0	1
	1	1	0
	1	1	1
	0	0	0
	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
	1	0	0
	1	0	1
	1	1	0
	1	1	1

Exemplo

- Considere a expressão
  - S = A.B.C + A.D + A.B.D
- Como há 4 variáveis de entrada (A, B, C, D), há 2^4=16 interpretações
  - Variação 1 zero, 1 um
  - Variação 2 zeros, 2 um
  - Variação 4 zeros, 4 um
  - Variação 8 zeros, 8 um

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Exemplo

- $S = A.B.C + A.D + A.B.D$
- A seguir, adicionar uma coluna para cada subfórmula de S, além de uma coluna para o resultado final S
  - A.B.C
  - A.D
  - A.B.D

A	B	C	D	A.B.C	A.D	A.B.D	S
0	0	0	0				
0	0	0	1				
0	0	1	0				
0	0	1	1				
0	1	0	0				
0	1	0	1				
0	1	1	0				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	0	1				
1	0	1	0				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	0	1				
1	1	1	0				
1	1	1	1				

Exemplo

- S = A.B.C + A.D + A.B.D
- A seguir, adicionar uma coluna para cada subfórmula de S, além de uma coluna para o resultado final S
  - A.B.C
  - A.D
  - A.B.D
- Preencher cada coluna com seu respectivo resultado

A	B	C	D	A.B.C	A.D	A.B.D	S
0	0	0	0				
0	0	0	1				
0	0	1	0				
0	0	1	1				
0	1	0	0				
0	1	0	1				
0	1	1	0				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	0	1				
1	0	1	0				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	0	1				
1	1	1	0	1			
1	1	1	1	1			

Exemplo

- S = A.B.C + A.D + A.B.D
- A seguir, adicionar uma coluna para cada subfórmula de S, além de uma coluna para o resultado final S
  - A.B.C
  - A.D
  - A.B.D
- Preencher cada coluna com seu respectivo resultado

A	**B**	**C**	**D**	**A.B.C**	**A.D**	**A.B.D**	**S**
0	0	0	0	0			
0	0	0	1	0			
0	0	1	0	0			
0	0	1	1	0			
0	1	0	0	0			
0	1	0	1	0			
0	1	1	0	0			
0	1	1	1	0			
1	0	0	0	0			
1	0	0	1	0			
1	0	1	0	0			
1	0	1	1	0			
1	1	0	0	0			
1	1	0	1	0			
1	1	1	0	1			
1	1	1	1	1			

Exemplo

- $S = A.B.C + A.D + A.B.D$
- A seguir, adicionar uma coluna para cada subfórmula de S, além de uma coluna para o resultado final S
  - A.B.C
  - A.D
  - A.B.D
- Preencher cada coluna com seu respectivo resultado

A	B	C	D	A.B.C	A.D	A.B.D	S
0	0	0	0	0			
0	0	0	1	0			
0	0	1	0	0			
0	0	1	1	0			
0	1	0	0	0			
0	1	0	1	0			
0	1	1	0	0			
0	1	1	1	0			
1	0	0	0	0			
1	0	0	1	0	1		
1	0	1	0	0			
1	0	1	1	0	1		
1	1	0	0	0			
1	1	0	1	0	1		
1	1	1	0	1			
1	1	1	1	1	1		

Exemplo

- S = A.B.C + A.D + A.B.D
- A seguir, adicionar uma coluna para cada subfórmula de S, além de uma coluna para o resultado final S
  - A.B.C
  - A.D
  - A.B.D
- Preencher cada coluna com seu respectivo resultado

A	B	C	D	A.B.C	A.D	A.B.D	S
0	0	0	0	0	0		
0	0	0	1	0	0		
0	0	1	0	0	0		
0	0	1	1	0	0		
0	1	0	0	0	0		
0	1	0	1	0	0		
0	1	1	0	0	0		
0	1	1	1	0	0		
1	0	0	0	0	0		
1	0	0	1	0	1		
1	0	1	0	0	0		
1	0	1	1	0	1		
1	1	0	0	0	0		
1	1	0	1	0	1		
1	1	1	0	1	0		
1	1	1	1	1	1		

Exemplo

- S = A.B.C + A.D + A.B.D
- A seguir, adicionar uma coluna para cada subfórmula de S, além de uma coluna para o resultado final S
  - A.B.C
  - A.D
  - A.B.D
- Preencher cada coluna com seu respectivo resultado

A	B	C	D	A.B.C	A.D	A.B.D	S
0	0	0	0	0	0		
0	0	0	1	0	0		
0	0	1	0	0	0		
0	0	1	1	0	0		
0	1	0	0	0	0		
0	1	0	1	0	0		
0	1	1	0	0	0		
0	1	1	1	0	0		
1	0	0	0	0	0		
1	0	0	1	0	1		
1	0	1	0	0	0		
1	0	1	1	0	1		
1	1	0	0	0	0		
1	1	0	1	0	1	1	
1	1	1	0	1	0		
1	1	1	1	1	1	1	

Exemplo

- S = A.B.C + A.D + A.B.D
- A seguir, adicionar uma coluna para cada subfórmula de S, além de uma coluna para o resultado final S
  - A.B.C
  - A.D
  - A.B.D
- Preencher cada coluna com seu respectivo resultado

A	B	C	D	A.B.C	A.D	A.B.D	S
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	0	0	0	0	
1	0	1	1	0	1	0	
1	1	0	0	0	0	0	
1	1	0	1	0	1	1	
1	1	1	0	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

Exemplo

- S = A.B.C + A.D + A.B.D
- A seguir, adicionar uma coluna para cada subfórmula de S, além de uma coluna para o resultado final S
  - A.B.C
  - A.D
  - A.B.D
- Preencher cada coluna com seu respectivo resultado
- Por último, preencher a coluna do resultado final

A	B	C	D	A.B.C	A.D	A.B.D	S
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Exemplo

- S = A.B.C + A.D + A.B.D
- A seguir, adicionar uma coluna para cada subfórmula de S, além de uma coluna para o resultado final S
  - A.B.C
  - A.D
  - A.B.D
- Preencher cada coluna com seu respectivo resultado
- Por último, preencher a coluna do resultado final

A	B	C	D	A.B.C	A.D	A.B.D	S
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Exercício

- Encontre a tabela verdade da expressão
  - $S = \bar{A}+B+A.B.C'$

Exercício

- Encontre a tabela verdade da expressão
  - $S = \bar{A}+B+A.B.C'$

A	B	C	$\bar{A}$	C'	A.B.C'	S
0	0	0	1	1		
0	0	1	1	0		
0	1	0	1	1		
0	1	1	1	0		
1	0	0	0	1		
1	0	1	0	0		
1	1	0	0	1		
1	1	1	0	0		

Solução

- Encontre a tabela verdade da expressão
  - $S = \bar{A}+B+A.B.C'$

A	B	C	$\bar{A}$	C’	A.B.C’	S
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1

Exercício

- Montar a tabela verdade da expressão
  - $S = A.B.C + A.B'.C + A'.B'.C + A'.B'.C'$

Exercício

- Montar a tabela verdade da expressão
  - S = A.B.C + A.B'.C + A'.B'.C + A'.B'.C'

A	B	C	A'	B'	C'	A.B.C	A.B'.C	A'.B'.C	A'.B'.C'	S
0	0	0	1	1	1					
0	0	1	1	1	0					
0	1	0	1	0	1					
0	1	1	1	0	0					
1	0	0	0	1	1					
1	0	1	0	1	0					
1	1	0	0	0	1					
1	1	1	0	0	0					

Solução

- Montar a tabela verdade da expressão
  - S = A.B.C + A.B'.C + A'.B'.C + A'.B'.C'

A	B	C	A'	B'	C'	A.B.C	A.B'.C	A'.B'.C	A'.B'.C'	S
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Equivalência de Expressões Booleanas por Tabela Verdade

- Sejam S1 e S2 duas expressões booleanas
- S1 e S2 são **equivalentes** se e somente se para todas as interpretações possíveis (linhas) na tabela verdade ocorre S1=S2
- Se S1≠S2 em pelo menos uma interpretação, então S1 e S2 não são equivalentes

Exercício

- Verifique, usando tabela verdade, se as expressões S1 e S2 são equivalentes
  - S1 = A
  - S2 = A.(A+B)

A	B	A+B	S1	S2
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Solução

- Verifique, usando tabela verdade, se as expressões S1 e S2 são equivalentes
  - S1 = A
  - S2 = A.(A+B)
- Como S1=S2 em todas as interpretações possíveis na tabela verdade, as expressões são equivalentes
  - A.(A+B) = A
- Como veremos mais adiante, esta é uma propriedade, conhecida como **absorção**

A	B	A+B	S1	S2
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Exercício

- Verifique, usando tabela verdade, se as expressões S1, S2, S3 são equivalentes entre si
  - S1 = A
  - S2 = A.(1 + B)
  - S3 = A + A.B

A	B	1+B	A.B	S1	S2	S3
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Solução

- Verifique, usando tabela verdade, se as expressões S1, S2, S3 são equivalentes entre si
  - S1 = A
  - S2 = A.(1 + B)
  - S3 = A + A.B
- Como S1=S2=S3 em todas as interpretações possíveis na tabela verdade, as expressões são equivalentes
  - A + A.B = A.(1+B) = A
- Como veremos mais adiante, esta é uma propriedade, conhecida como **absorção**

A	B	1+B	A.B	S1	S2	S3
0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Exercício

- Verifique, usando tabela verdade, se as expressões S1 e S2 são equivalentes
  - S1 = A.(B + C)
  - S2 = A.B + A.C

A	B	C	B+C	A.B	A.C	S1	S2
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Solução

- Verifique, usando tabela verdade, se as expressões S1 e S2 são equivalentes
  - S1 = A.(B + C)
  - S2 = A.B + A.C
- Como S1=S2 em todas as interpretações possíveis na tabela verdade, as expressões são equivalentes
  - A.(B + C) = A.B + A.C
- Como veremos mais adiante, esta é a propriedade **distributiva** da multiplicação booleana

A	B	C	B+C	A.B	A.C	S1	S2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Exercício

- Verifique, usando tabela verdade, se as expressões S1 e S2 são equivalentes
  - S1 = A+(B.C)
  - S2 = (A+B) . (A+C)

A	B	C	B.C	A+B	A+C	S1	S2
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Solução

- Verifique, usando tabela verdade, se as expressões S1 e S2 são equivalentes
  - S1 = A+(B.C)
  - S2 = (A+B) . (A+C)
- Como S1=S2 em todas as interpretações possíveis na tabela verdade, as expressões são equivalentes
  - A+(B.C) = (A+B) . (A+C)
- Como veremos mais adiante, esta é a propriedade **distributiva** da adição booleana

A	B	C	B.C	A+B	A+C	S1	S2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Exercício

- Verifique, usando tabela verdade, se as expressões S1 e S2 são equivalentes
  - $S1 = (\bar{A}.\bar{B})$
  - $S2 = (A.B)'$

A	B	A'	B'	A.B	S1	S2
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Solução

- Verifique, usando tabela verdade, se as expressões S1 e S2 são equivalentes
  - S1 = $(\bar{A}.\bar{B})$
  - S2 = (A.B)’
- Como S1≠S2 em pelo menos uma interpretação (de fato, em 2 das 4 possíveis) na tabela verdade, as expressões não são equivalentes
- Portanto,
  - $(\bar{A}.\bar{B}) \neq (A.B)'$

A	B	A’	B’	A.B	S1	S2
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0

Resumo de Algumas Propriedades provadas por Tabelas Verdade

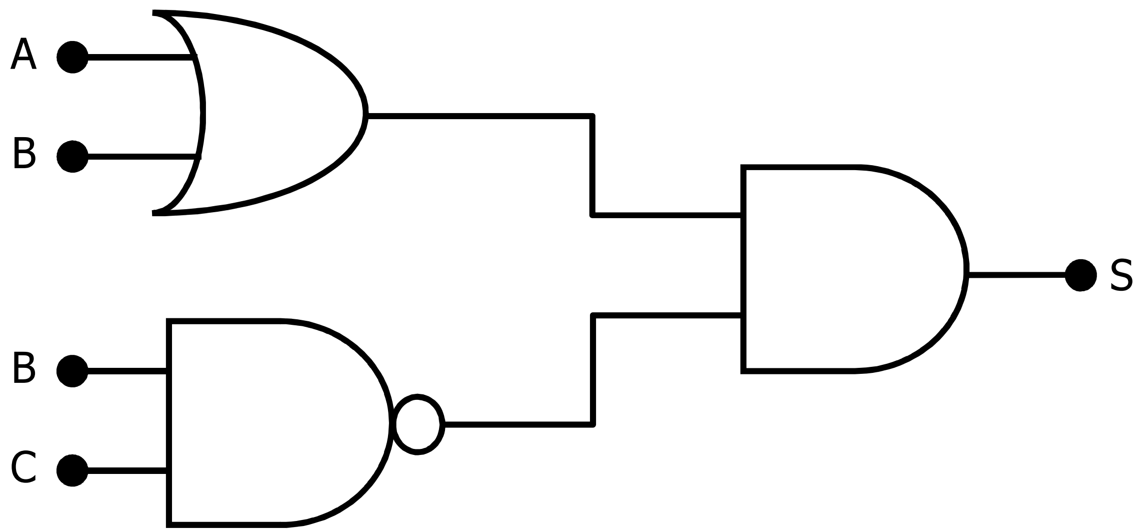
- Absorção
  - A + (A.B) = A
  - A . (A+B) = A
- Distributiva
  - A.(B+C) = A.B + A.C
  - A+(B.C) = (A+B) . (A+C)

Obtendo a Tabela Verdade a partir de um Circuito

- De forma análoga, é possível estudar o comportamento de um circuito por meio da sua tabela verdade
- Dado um circuito, é necessário extrair sua expressão característica; a partir dela é possível montar a tabela verdade correspondente

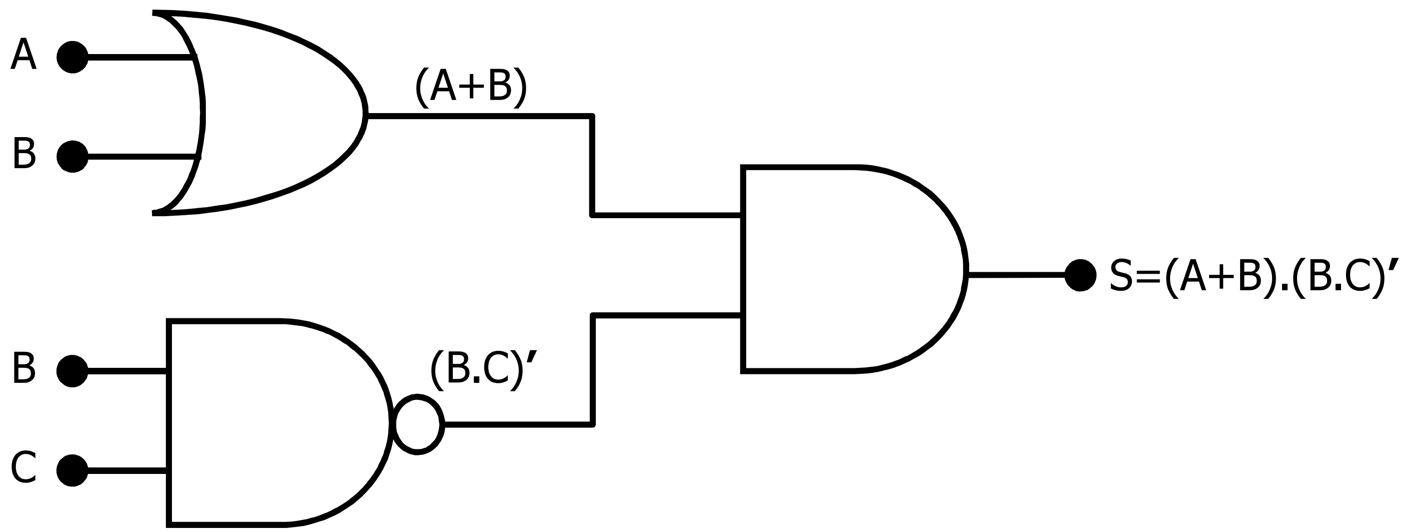
Exemplo

- A partir do circuito:



Exemplo

- A partir do circuito:



- Extraímos sua expressão característica
  - $S = (A+B) \,.\, \overline{(B.C)}$

Exemplo

- A partir da expressão
  - $S = (A+B) \cdot \overline{(B.C)}$
- Obtém-se a tabela verdade, como anteriormente explicado

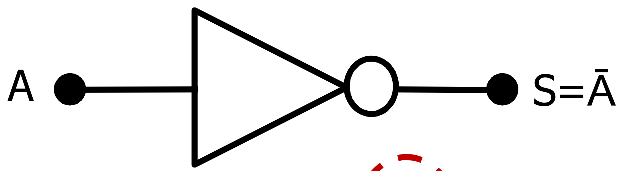
A	B	C	A+B	B.C	(B.C)’	S
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0

Equivalência de Blocos Lógicos

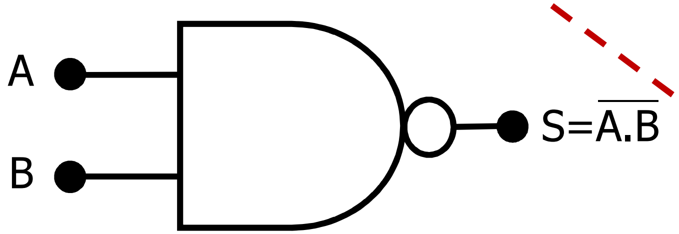
- Qualquer bloco lógico básico pode ser obtido utilizando outro bloco qualquer e inversores
- Inversores podem ser obtidos a partir de portas **NAND** e **NOR**
- Veremos a seguir essas equivalências entre determinados blocos
- Tais equivalências podem ser provadas pela tabelas verdades correspondentes da seguinte forma
  - Seja S1 a expressão característica do primeiro bloco B1
  - Seja S2 a expressão característica do segundo bloco B2
  - Se para todas as interpretações possíveis de B1 e B2, sempre ocorrer que S1=S2, então B1 é equivalente a B2

Inversor a partir de porta NAND

- Inversor

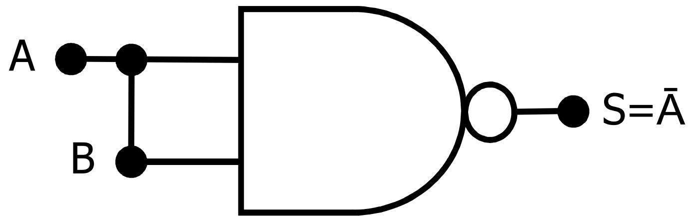


A	S
0	1
1	0



A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Ao interligar as entradas de uma porta **NAND**, obtém-se um inversor

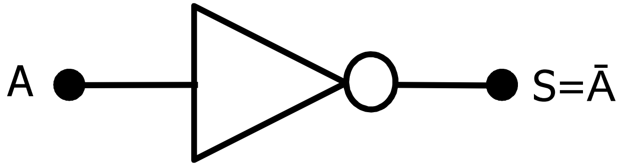


A	B	S
0	0	1
1	1	0

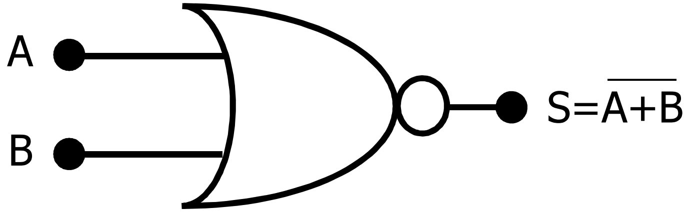
Note que, para cada interpretação possível, os resultados são equivalentes

Inversor a partir de porta NOR

- Inversor

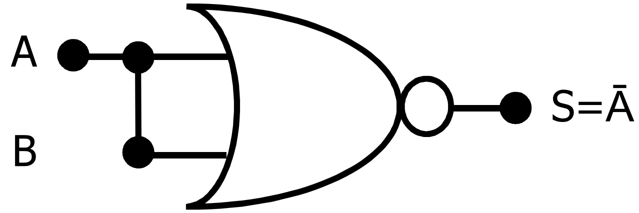


A	S
0	1
1	0



A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

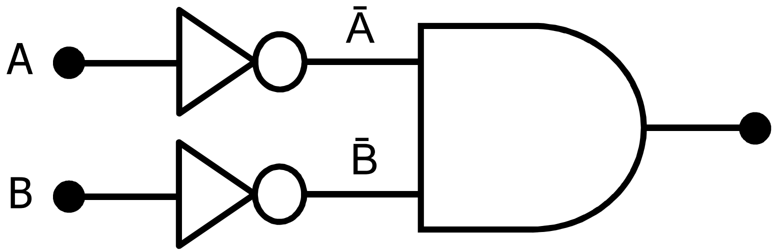
- Ao interligar as entradas de uma porta **NOR**, obtém-se um inversor

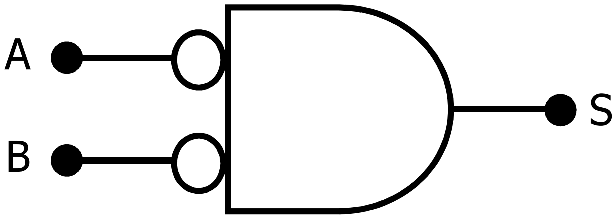


A	B	S
0	0	1
1	1	0

Porta NOU a partir de porta E e inversores

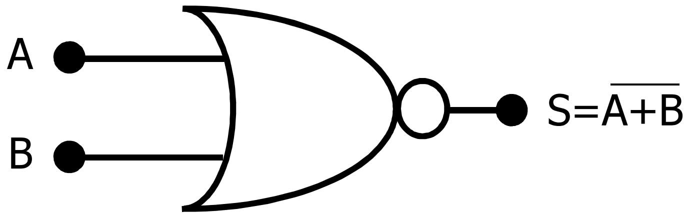
- Porta **E** e inversores





A	B	Ā	B̄	S
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

- Porta **NOU**

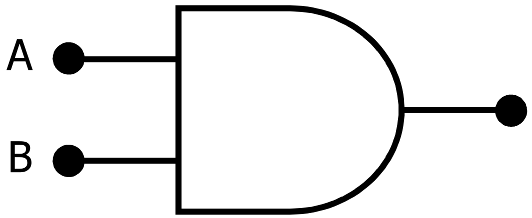
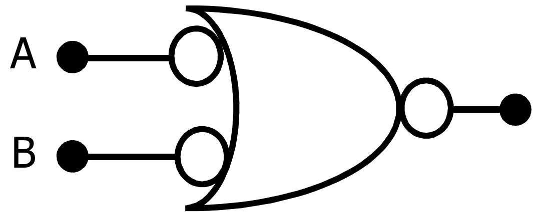
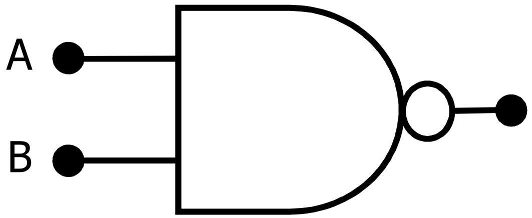
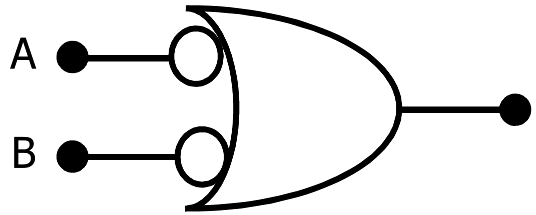
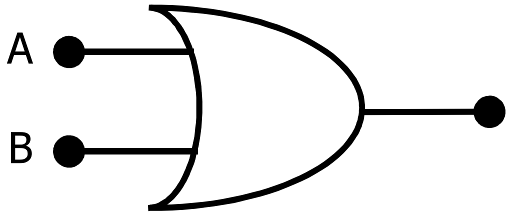
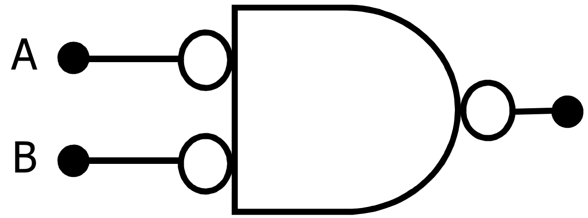
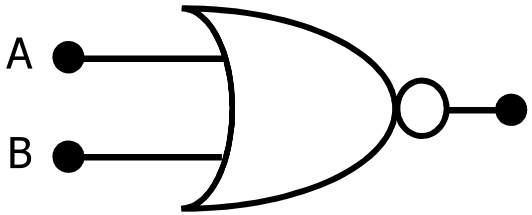
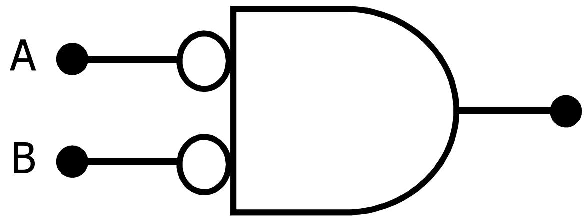


A	B	$S=\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Equivalência de Blocos Lógicos

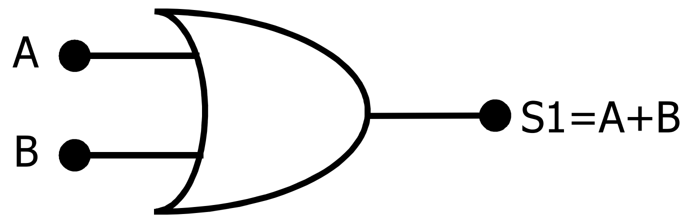
- De maneira similar, a equivalência entre os blocos mostrados a seguir pode ser verificada

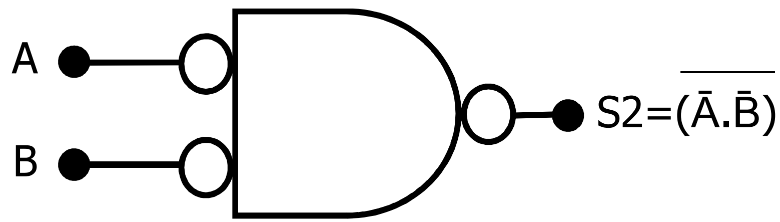
Blocos Lógicos Equivalentes

Nome	Bloco Lógico		Bloco Equivalente	
AND		$S=A.B$		$S=\overline{(\bar{A}+\bar{B})}$
NAND		$S=\overline{A.B}$		$S=\bar{A}+\bar{B}$
OR		$S=A+B$		$S=\overline{(\bar{A}.\bar{B})}$
NOR		$S=\overline{A+B}$		$S=\bar{A}.\bar{B}$

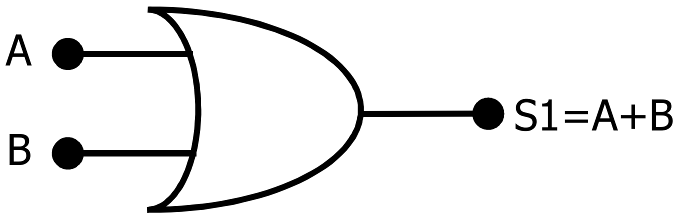
Exercício

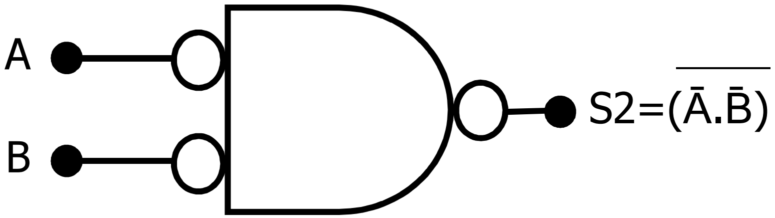
- Prove, usando tabela verdade, que os seguintes blocos lógicos são equivalentes





Solução





A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A}.\bar{B}$	S1= $A+B$	S2= $\overline{\bar{A}.\bar{B}}$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

Slides baseados em:

- Idoeta, I.V. & Capuano, F.G.; Elementos de Eletrônica Digital, 12ª. edição, Érica, 1987.
- E. Mendelson; Álgebra booleana e circuitos de chaveamento, McGraw-Hill, 1977.